ما هي بحوث العمليات؟

- **هي علم الادارة اي علم اتخاذ القرارات و تطبيقها** "دانتزيج" و يعد هذا التعريف تعريفا شاملا و لا يقدم مفهوما واضحا لبحوث العمليات يميزها عن غيرها من المصطلحات , فبحوث العمليات ليست علم اتخاذ القرارات و تطبيقها و انما هي ادوات تستعمل مع غيرها من الادوات الاخرى للمساعدة في اتخاذ القرارات
- **هي مدخل العلم المستخدم في حل المشكلات التي تصادف الادارة العليا بمشروعات** "وانجر" هذا التعريف يحدد نطاق بحوث العمليات بالادارة العليا للمشروعات في الوقت الذي يتسع فيه نطاقها سواء اكان على نطاق الادارة التنفيذية ام الادارة العليا للمشروع.
- **هي تطبيق الطريقة العلمية بتوفير الاساس الكمي الذي يمكن الادارة من اتخاذ القرار** "مورس و كمبال" و من هذا التعريف يمكن تحديد العناصر الرئيسية لبحوث العمليات على النحو الاتي:
  - ✓ أستعمال الطريقة العلمية
  - ✓ الاعتماد على الاساس الكمي مثل استعمال ادوات بحوث العمليات و اساليبها
  - ✓ يمكن الادارة من اتخاذ قرارات اكثر موضوعية

و لهذا يمكننا القول ان بحوث العمليات هي تطبيق الطريقة العلمية بتوفير الاساس الكمي و بإستعمال ادوات بحوث العمليات و اساليبها كالبرمجة الخطية و البرمجة العددية و البرمجة غير الخطية و التحليل الشبكي, و ذلك لتمكين الادارة من اتخاذ قرارات اكثر موضوعية.

مساهمة بحوث العمليات مدخلا كميا في حل مشاكل الادارة :

يعد الاستخدام المباشر للارقام والعلاقات الرياضية والاساليبوالادوات الكمية حلقة الوصل في هذا المدخل التي تاتي ضمن مايسمى ((بحوث العمليات)) وذلك لتفسير كثير من مشكلات ادارة الاعمال . يعتمد المدخل الكمي والعلاقات الرياضية ((المعادلات والمتباينات)) والنماذج الرياضية اساسا لتوضيح المشكلة . في حين تعتمد المداخل الاخرى لدراسة الاعمال على المقارنة والوصف والتحليل استنادا الى اساليب البحث والاستبيان . وهذه نقطة الاختلاف الجوهرية التي تعطي المدخل الكمي سمات خاصة . اذ يعتمد هذا الاخير على عدد من الاساليب والادوات التي تقع ضمن مايسمى ببحوث العمليات وذلك لتحديد ماهو مطلوب انجازه في الواقع العملي للمشكلة , فعلى سبيل المثال في مجال ادارة الانتاج يتم تحديد المستلزمات من المواد الاولية والايدي العاملة واية مدخلات اخرى للعملية الانتاجية , مع بيان ماهية المخرجات وذلك من خلال احد اساليب بحوث العمليات المحددة لهذا الغرض .

ويفسر بحوث العمليات بوصفها مدخلا كميا لدراسة المشاكل الادارية كافة من خلال النظر للمشكلة من زاوية كمية وبعبارة اخرى تؤطر المشكلة لتكون انموذجا , وتتضح اهمية بحوث العمليات مدخلا كميا ايضا لدراسة المشاكل الادارية في الواقع العملي لمنظمة الاعمال من خلال الامور الاتية :

1- تسهم بحوث العمليات في تقريب المشكلة الادارية الى الواقع بموجب صيغ علمية مبسطة ونماذج رياضية معينة تظهر مكونات المشكلة ضمن اطر م التفكير العلمي المنظم والعقلاني .

2- عرض النماذج في مجموعة من العلاقات الرياضية بالشكل الذي يوضح الفرص المختلفة (البدائل) لعملية اتخاذ القرارات وبما يسهم في تفسير عناصر المشكلة والعوامل المؤثرة فيها .

3- تعميم المعايير القياسية والمثالية لاتخاذ القرارات , ذلك بان الادارة التي تتمكن من وضع نموذج رياضي معين لمشكلة ما , تستطيع ان تطبق هذا النموذج في المستقبل غندما تواجهها مشكلة مماثلة وهكذا تدار الاعمال المختلفة في الوظائف كافة لمعالجة المشاكل في الواقع العملي .

ان التعامل مع اساليب بحوث العمليات كافة في مختلف المشاكل الادارية في منظمة الاعمال من شانه ان يرسخ العلاقة القائمة بين هذه الاساليب وهذه المشاكل , ويمكن ان يحدث التوافق التام بين هذه الاساليب والمشاكل الادارية عامة عند استعمال نماذج معينة تحمل مسميات متطابقة مع تلك الوظائف , وكما هي الحال في استعمال نماذج النقل والتسويق ونماذج الخزين في ادارة النماذج ...وهكذا .

ان هذه الصورة المتكاملة تقرب الحالة الى مايسمى بالادارة العلمية (Management Science) وهي التسمية التي اطلقت على بحوث العمليات بوصفها منهج عمل علمي (مثلما تقدم ذكره في تعاريف بحوث العمليات) والرسم البياني الاتي يوضح ما تقدم

رسم بياني (1)

شروط تطبيق بحوث العمليات :

ان اساليب بحوث العمليات كافة يمكن ان تطبق في مختلف منظمات الاعمال الانتاجية منها والخدمية , بشرط توفر على النحو الاتي :

اولا : محدودية الموارد (Limited resourses) :

وتعني ان الموارد التي تستعملها منظمة الاعمال سواء كان ذلك في العملية الانتاجية ام التجارية وماشابه ذلك تتصف بكونها محدودة الكمية من حيث توفرها وسهولة الحصول عليها ,بمعنى اخر ان الموارد المتوافرة تحت تصرف منظمة الاعمال لايوجد منها كميات كبيرة الى درجة بحيث يمكن الحصول عليها في اية لحظة ومن دون عناء وكلفة , وينطبق هذا الشرط على ماياتي :

1 - الموارد المالية على نحو عام .
2 - الموارد البشرية ذات الكفاءة العالية والمتخصصة .
3 - الموارد الاولية التي يتم الحصول عليها مقابل ثمن وتؤلف نسبة مهمة من عنصر الكلفة للوحدة الواحدة من المنتوج .
4 - مساحات الاراضي ذات المواصفات النادرة , كما هي الحال مع مساحات الاراضي التي يتواجد فيها النفط او مناجم الفحم والذهب وماشابه ذلك في حين قد لاتعد الصحراء الجرداء او الاراضي غير الصالحة للزراعة من الموارد المحدودة , وبخاصة في البلدان التي لديها مساحات جغرافية شاسعة .

ثانيا : تعدد البدائل

يقصد بهذا الشرط ان هناك اكثر من بديل او طريقة تم بموجبها استغلال المورد المتوفر , فعند الحديث عن المستلزمات الاساسية لعملية الانتاج وبالتحديد عن المواد الاولية الداخلة في صنع المنتج , يعني هذا الشرط ان هناك اكثر من طريقة لاستغلال هذه المواد الاولية وعلى سبيل المثال اذا كان المقصود بالمواد الاولية هنا هو الاقمشة الداخلة في انتاج البدلات الرجالية او السراويل , فان تعدد البدائل يقصد به هو وجود اكثر من طريقة لقص القماش من اجل الحصول على ماهو مطلوب من منتجات باقل كلفة ممكنة ,ومن الجدير بالذكر هنا ان اختيار البديل الافضل او الامثل يخضع لمعايير متعددة اهمها ان يحقق البديل اعلى الفوائد والمنافع او اقل التكاليف والخسائر وهو مايعرف بالبديل الامثل . ان هذين الشرطين (محدودية الموارد وتعدد البدائل) متلازمان , احدهما بالاخر عند تعلق الامر بتطبيق اساليب بحوث العمليات في منظمة الاعمال التي منها على سبيل المثال النماذج الاتية :

- اسلوب البرمجة الخطية والبرمجة باعداد صحيحة .
- اسلوب نماذج النقل .
- اسلوب شبكات الاعمال .
- اسلوب السيطرة على الخزين .
- اسلوب تحليل ماركوف .
- اسلوب خطوط الانتظار .

يستعمل احد هذه الاساليب او اكثر من اسلوب في كل وظيفة من الوظائف الادارية وهذه الاخيرة تتشعب وتتنوع بحسب نوع النشاط الانتاجي او الخدمي الذي تمارسه اية منظمة اعمال .

النماذج في بحوث العمليات :

على العموم يتم تطبيق بحوث العمليات والاستفادة من وسائلها عن طريق صياغة المشكلة على هيأة نموذج والنماذج متعددة ومختلفة الاستعمال وفي هذا المجال يتم التمييز بين نوعين من النماذج او الاساليب الكمية هي :

1 - نماذج رياضية تستعمل في ترشيد القرار المطلوب اتخاذه من خلال تصميم نظام مصغر يعبر بشكل او باخر عن النظام الفعلي ضمن مايعرف بحالة المحاكاة (simulation) للواقع بحيث ان حل المشكلة ضمن نظام المحاكاة يمكن ان يؤدي الى حلها في الواقع العملي , ويرجع ذلك الى اسباب اقتصادية وكلفوية .

2 - نماذج رياضية تستخدم في وضع مقياس امثل للمقارنة بحيث يكون ذلك على اساس توفر الظروف والامكانات المواكبة كافة التي تعد شرطا لكي يمكن ان يصبح الحل ممكن كما هي الحال عند استعمال اسلوب البرمجة الخطية وبالتحديد طريقة السمبلكس (simplex method) في التخطيط لعناصر الانتاج كافة ومن ثم تحديد حجم النموذج الامثل الذي يحقق الاستعمال الكامل لمستلزمات الانتاج ويضمن اكبر العوائد الممكنة لمنظمة الاعمال وتشتمل النماذج الرياضية على ثلاثة مجاميع اساسية هي :

أ - **المتغيرات المتعلقة باتخاذ القرار Decision variables** :

وهي المتغيرات التي يمكن الوصول الى قيمها عند حل النموذج وهنا يتخذ القرار وفقا للقيم المحددة لهذه المتغيرات ولذلك يمكن تسميتها (بالقرارات المتغيرة) .

ب – **القيود او محددات النموذج constraints or restrictions of the model :**

وهذه المحددات ضرورية في تكوين النماذج فمن الضروري ان تؤخذ بظر الاعتبار المحددات المادية للنظام وهذه المححدات هي التي تدفع بالمتغيرات المتعلقة باتخاذ القرار بان تكون ضمن القيم الممكنة .

ج – **دالة الهدف objective function :**

دالة الهدف هي الصيغة الرياضية (المعادلة الرياضية) التي تظهر قياس التاثير الكلي (للربحية) اذا كانت دالة الهدف من نوع تعظيم Max او (للكلفة) اذا كانت دالة الهدف من نوع تصغير (تدنيه) Minimization للمتغيرات المتعلقة باتخاذ القرار وهي التي تحدد (كما ذكرناه اعلاه) مقدار الربح الكلي او مقدار الكلفة الكلية .

مراحل دراسة بحوث العمليات :

اهم هدف يتحقق عند استعمال بحوث العمليات هو لمساعدة الادارة في اتخاذ القرار الرشيد (الامثل) .وتعد عملية اتخاذ القرارات جوهر العملية الادارية بشكل عام , اذ يكرس المدراء جل اهتمامهم عليها . ويقصد بعملية اتخاذ القرار بانها مجموعة الخطوات التي يقوم بها متخذ القرار من اجل الوصول الى الهدف الذي يسعى من اجله (مراحل استعمال بحوث العمليات) , وترد في هذا الصدد تسميات مختلفة لهذه الخطوات الا انها بشكل عام تتمحور حول الترتيب والتسميات الاتية :

أ - تعريف المشكلة قيد البحث Definition of the problem.

ب -بناء النموذج construction of the model .

ج – حل النموذج solution of the model.

د- صلاحية النموذج validation of the model .

ه- تطبيق واعتماد النتائج Implementation of the final results .

وتحتاج المرحلة الاولى من مراحل الدراسة الى تعريف واضح للمشكلة والتي تتحدد بثلاث خطوات رئيسية وعلى النحو الاتي :

- تحديد واضح للاهداف المراد تحقيقها من خلال الدراسة .
- تحديد واضحللبدائل المتعلقة باتخاذ القرار .
- تحديد واضح للمحددات او المتطلبات اللازمة لتحقيق الاهداف .

اما المرحلة الثانية فتتطلب تحديد شكل النموذج المطلوب فاذا كان النموذج المقدر صياغته هو من صيغ النماذج الرياضية فيمكن اللجوء الى موضوع البرمجة الخطية لدراسة المشكلة بينما اذا كانت الدراسة معقدة وكبيرة فمن الممكن اللجوء الى نماذج المحاكاة (ذكرت سلفا) simulation models التي تعد في هذه الحالة اكثر ملائمة .

اما المرحلة الثالثة والمتعلقة بايجاد حل للنموذج المقترح (الحل يعني ايجاد قيم المتغيرات للقرار) وهنا الحل يمثل النتيجة المثلى (optimal) باستعمال نماذج الحل الامثل optimization models .اما المرحلة الرابعة فانها تتعلق باختبار النتائج ويتم ذلك مثلا بمقارنة النتائج مع سلسلة زمنية سابقة لمتغيرات القرار التي يشملها النموذج او بعض النتائج التاريخية .

واخيرا المرحلة الخامسة التي تتعلق بتطبيق النتائج التي تم التوصل اليها في الحياة العملية وتاخذ شكل التوجيهات او التعليمات الى الادارات المختلفة للوصول الى النتائج التي رسمت في المرحلة الاولى .

" المحاضرة الثانية "

(البرمجة الخطية)

٢-١ البرمجة الخطية كمفهوم

٢-٢ البرمجة الخطية – التعريف

٢-٣ نموذج البرمجة الخطية وبناؤه

البرمجة الخطية Linear Programming

2-1 البرمجة الخطية كمفهوم :

مع كبر حجم المنشآت وتعدد اوجه نشاطها ظهر كثير من المتغيرات والمشاكل التي تؤثر بصورة او باخرى في امكانية اتخاذ القرار السليم الامر الذي يتطلب ضرورة البحث عن اسلوب جديد يساعد على اتخاذ عدد من القرارات الحرجة التي تواجه الادارة العليا للمنشآت. اذ تُعد البرمجة الخطية احد الاساليب العلمية الحديثة لبحوث العمليات التي ساعدت وتساعد على ايجاد القرار المناسب وقد أسهم كل من الاقتصاديين والرياضيين في تطوير هذا الاسلوب الذي بدأ ظهوره في عام 1920 على ايدي الاقتصادي الشهير (ليونتيف) في تطويره لتحليل المدخلات والمخرجات، ثم تابع تطوره في عام 1947 على ايدي الرياضي الانجليزي (دانتزك) Dantizg إذ اكتشف طريقة simplex، احدى طرق الحل للبرمجة الخطية التي سنعرض لها بشئ من التفصيل .

2-2 البرمجة الخطية - التعريف :

تعرف البرمجة الخطية بأنها اسلوب رياضي حديث يستعمل لاالة لايجاد افضل الاستعمالات للموارد المحدودة المتاحة لدى المنشأة ولهذا الاسلوب جانبان هما البرمجة Program وتعني امكانية استعمال الاسلوب لايجاد البرامج المختلفة لاستعمال الموارد المحدودة المتاحة لدى المنشأة وبما يتلائم مع القيود المفروضة على هذه الموارد تم اختيار أفضل هذه البرامج التي تحقق هدف المنشأة وذلك بالانطلاق من برنامج لاخر افضل منه وهكذا.

أما الخطية Linearity فيقصد بها العلاقات بين المتغيرات المحددة كافة للمشكلة قيد الدرس علاقات خطية، اي ان أستجابة المتغيرات كافة هي استجابة واحدة وتتناغم مع استجابة دالة الهدف .

ومما تجدر الاشارة اليه هو ان الغاية من تطبيق أسلوب البرمجة الخطية هي الوصول الى حل نموذج البرمجة الخطية (ونموذج البرمجة الخطية هو عبارة عن مجموعة من المعادلات والمتباينات بالاضافة الى دالة الهدف). ولاننسى ان لكل مجموعة من المعادلات حلاً ، وعادة ما

البرمجة الخطية Linear Programming

2-1 البرمجة الخطية كمفهوم :

مع كبر حجم المنشآت وتعدد اوجه نشاطها ظهر كثير من المتغيرات والمشاكل التي تؤثر بصورة او باخرى في امكانية اتخاذ القرار السليم الامر الذي يتطلب ضرورة البحث عن اسلوب جديد يساعد على اتخاذ عدد من القرارات الحرجة التي تواجه الادارة العليا للمنشأت. اذ تُعد البرمجة الخطية احد الاساليب العلمية الحديثة لبحوث العمليات التي ساعدت وتساعد على ايجاد القرار المناسب وقد أسهم كل من الاقتصاديين والرياضيين في تطوير هذا الاسلوب الذي بدأ ظهوره في عام 1920 على ايدي الاقتصادي الشهير (ليونتيف) في تطويره لتحليل المدخلات والمخرجات، ثم تابع تطوره في عام 1947 على ايدي الرياضي الانجليزي (دانتزك Dantizg) إذ أكتشف طريقة simplex، احدى طرق الحل للبرمجة الخطية التي سنعرض لها بشئ من التفصيل .

2-2 البرمجة الخطية – التعريف :

تعرف البرمجة الخطية بأنها اسلوب رياضي حديث يستعمل الالة لايجاد افضل الاستعمالات للموارد المحدودة المتاحة لدى المنشأة ولهذا الاسلوب جانبان هما البرمجة Program وتعني امكانية استعمال الاسلوب لايجاد البرامج المختلفة لاستعمال الموارد المحدودة المتاحة لدى المنشأة وبما يتلائم مع القيود المفروضة على هذه الموارد تم اختيار أفضل هذه البرامج التي تحقق هدف المنشأة وذلك بالانطلاق من برنامج لاخر افضل منه وهكذا.

أما الخطية Linearity فيقصد بها العلاقات بين المتغيرات المحددة كافة للمشكلة قيد الدرس علاقات خطية، اي ان أستجابة المتغيرات كافة هي استجابة واحدة وتتناغم مع استجابة دالة الهدف .

ومما تجدر الاشارة اليه هو ان الغاية من تطبيق أسلوب البرمجة الخطية هي الوصول الى حل نموذج البرمجة الخطية (ونموذج البرمجة الخطية هو عبارة عن مجموعة من المعادلات والمتباينات بالاضافة الى دالة الهدف). ولاننسى ان لكل مجموعة من المعادلات حلا ، وعادة ما

تكون للمعادلات الانية حلول اي ايجاد قيم المتغيرات، وفي حالة حل نموذج البرمجة الخطية دائما نسعى الى ايجاد الحل الامثل (اي الحل الذي يحقق القيود كافة بوجود دالة الهدف objective function) وتكون الحلول على ثلاثة انواع:

أ. الحل Solution :

وهو حل ممكن الوصول اليه في أية مجموعة من المعادلات.

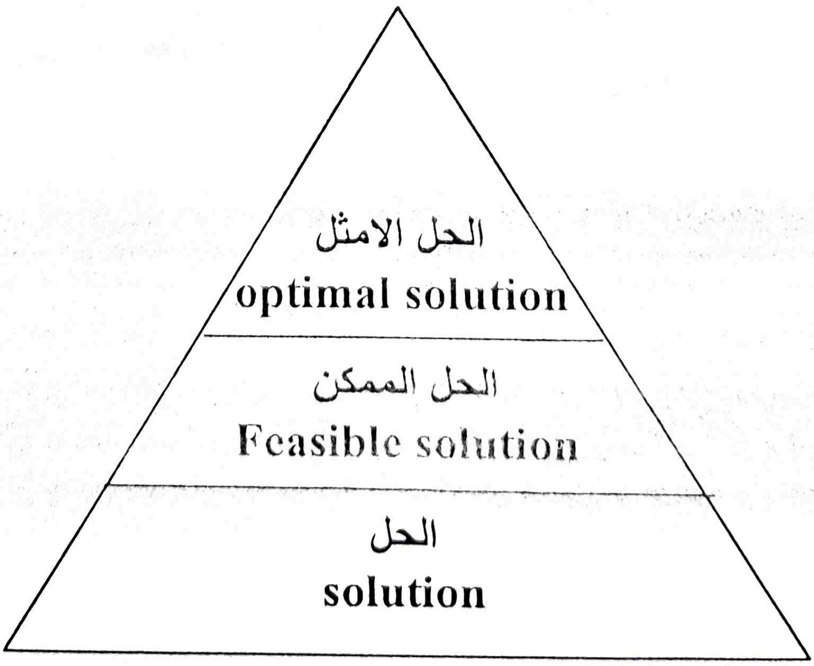
ب. الحل الممكن Feasible solution :

وهو الحل الذي يمكن ايجاده بعد التوصل الى الحل في الحالة الاولى وهذا الحل يحقق القيود كافة بشكل عام.

ج. الحل الامثل Optimal solution :

وهو الحل الذي يمكن ايجاده بعد التوصل الى الحل الممكن، وهذا الحل يحقق القيود كافة بوجود دالة الهدف.

وبهذا الصدد يجب التأكد من أن الحل الممكن لا يتحقق بعد وجود الحل، ولايمكن تحقيق الحل الامثل الا بعد ان يتحقق الحل الممكن ويمكن تمثيل ذلك بالشكل رقم (1).



شكل رقم (1)

على انه ليس من الضروري ان يكون الهدف هو استغلال كل الطاقة المتاحة. كما انـه لـيس صحيحا دائما ان يكون البرنامج الامثل هو الذي يستغل كل الطاقات المتاحة، ووفقـا للعبـارة الاخيرة (عدم استغلال كل الطاقات) يكون التعبير الرياضي المناسب للعلاقة (1) هو:

$$2X_1 \leq 48 \qquad \text{.........}(2)$$

وتفسير البرنامج (2) يتفق مع احد مبادئ (فرضيات) بحوث العمليات، وهو بأمكاننا انتاج أية كمية بحيث لاتتعدى الطاقة التشغيلية المتاحة (48 ساعة)، وبينما يوجد للمعادلة (1) حل وحيـد (برنامج وحيد) والذي هو $X_1 = 24$، تكون لدينا مجموعة كبيرة من البرامج المتاحة التي تحقق المتباينة (2) احدهما هو $X_1 = 24$ [1].

والان لنفرض ان بالامكان ان ننتج على الماكينة السابقة منتجاً آخر، ويـستلزم انتـاج الوحدة الواحدة منه اربع ساعات فأن التعبير الذي يشترط استغلال كل الطاقات المتاحة، وبهـذا يكون البرنامج لكلا المنتجين:

$$2X_1 + 4X_2 = 48 \qquad \text{.........}(3)$$

X_1 : الكمية (عدد الوحدات) المنتجة من المنتج الاول.

X_2 : الكمية (عدد الوحدات) المنتجة من المنتج الثاني.

وجميع قيم X_1 و X_2 التي تحقق المعادلة (3) هي برامج او تخطيط انتاج للماكينة والتي منها مثلا:

$X_1 = 0 \qquad X_2 = 12$

$X_1 = 24 \qquad X_2 = 0$

فاذا كان البرنامج لايشترط أستغلال كل الطاقات المتاحة أمكن التعبير عنه بالمتباينة الأتية (4)

$$2X_1 + 4X_2 \leq 48 \qquad \text{.........}(4)$$

وهنا من الطبيعي ان كل البرامج التي تحقق المعادلة (3) تحقق ايضا المتباينة (4) الا ان هناك مجموعة كبيرة من البرامج التي تحقق المتباينة (4) ولاتحقق المعادلة (3) ومنها:

$X_1 = 2$ $\qquad$ $X_2 = 1$

$X_1 = 6$ $\qquad$ $X_2 = 3$

$X_1 = 5$ $\qquad$ $X_2 = 4$

$X_1 = 10$ $\qquad$ $X_2 = 6$

. $\qquad$.

. $\qquad$.

. $\qquad$.

فاذا كان لدينا ماكينة ثانية بحيث يجب مرور (تشغيل) كلٍّ من المنتجين X_1 و X_2 على هـذه الماكينة (بعد ان مراً أو شغلاً على الماكينة الاولى)، وان عدد ساعات التشغيل الكلية المتاحة في الماكينة الثانية هي (84) ساعة اسبوعياً والمنتج الاول يستغرق (4) ساعات في تشغيله بينمـا يستغرق المنتج الثاني ساعتين في تشغيله على الماكينة الثانية والمعادلة الآتية تبين ذلك

$$4X_1 + 2X_2 = 84 \qquad ....(5)$$

وبما ان (اذا كان البرنامج موضوع البحث لايشترط استغلال كل الطاقات المتاحة)، لذلك ستؤول المعادلة (5) الى المتباينة الاتية (6).

$$4X_1 + 4X_2 \leq 84 \qquad ....(6)$$

ولكي يكون برنامجاً متكاملاً يجب ان يأخذ في اعتباره طاقة كل من الماكنتين

$$\left.\begin{array}{l} 2X_1 + 4X_2 \leq 48 \\ 4X_1 + 2X_2 \leq 84 \end{array}\right\} \qquad ....(7)$$

وفي معظم الاحيان تكون المتباينات هي الصورة الرياضية الشائعة في مسائل البرمجة الخطيـة وذلك من طبيعة التخطيط ذاته الذي يسبق ذكره وهو (انه ليس من الضروري ان يكون استغلال كل الطاقات امثل البرامج).

وقد لاتكون جميع المتباينات في التعبيرات السابقة على صورة (اصغر او تساوي) ألا أنـه قـد تظهر المتباينة على صورة (أكبر او تساوي) فلو اردنا ادخال شرط المتعاقد مثلاً وهو الا تقـل مبيعات المنتج X_2 (مثلا) المسلمة اليه اسبوعياً عن سبع وحدات فان ذلك يتمثل في المتباينة الآتية:

$$X_2 \geq 7 \qquad ....(8)$$

وهي التعبير الرياضي المناسب، في هذه الحالة فاذا اضيفت الى التعبير الرياضي (7) سـيكون لدينا التعبير الاتي:

$4X_1 + 2X_2 \leq 84$
$X_2 \geq 7$

هذه التعبيرات الرياضية التي تعبر عن الشروط المطلوب (أستيفاؤها) عند انتاج X_1 و X_2 تسمى عادة (بالنموذج الرياضي)، وهي اللغة المختصرة التي تحول فيها المسألة المطروحة الى مجموعة من المعادلات او المتباينات وكل منها يحقق احد الشروط المطلوبة على التعبير الرياضي (9) الذي لايحتوي على كل القيود المطلوبة إذ يسمح بان تكون قيمة X_1 و X_2 سالبة لذلك يجب اضافة هذا الشرط ايضاً لاستكمال القيود كافة وبهذا يصبح النموذج الرياضي على النحو الآتي:

$$\left.\begin{aligned} 2X_1 + 4X_2 &\leq 48 \\ 4X_1 + 2X_2 &\leq 84 \\ X_2 &\geq 7 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}\right\} \quad ....(10)$$

ويسمى القيد $X_1, X_2 \geq 0$ بقيد عدم السلبية (non – negativity). وبالرغم من ان النموذج الرياضي (10) يعطينا صورة كاملة عن القيود الواجب استيفاؤها عند انتاجنا لـ X_1 و X_2، الا انه لايعطينا اية طريقة تتيح لنا تفضيل برنامج على اخر لذلك يلزم فضلاً عمّا تقدم وجود مقياس يقاس به ما يحققه لنا كل برنامج وبالتالي نستطيع ان نفضل برنامجاً على اخر، وهذا المقياس هو ما يسمى في مسالة البرمجة الخطية (دالة الهدف)، فمثلاً اذا امكننا في المسالة السابقة تحديد صافي الربح الناجم عن انتاج وحدة واحدة من المنتج الاول وليكن (C_1) وربح الوحدة الواحدة من المنتج الثاني (C_2) فان الربح الكلي يتحقق على وفق المعادلة الاتية (معادلة دالة الهدف)

$$Z = C_1 X_1 + C_2 X_2 \quad ....(11)$$

فاذا فرضنا ان $C_1=1$ و $C_2 = 2$ فستكون المعادلة (11) على النحو الآتي :

$$Z = X_1 + 2X_2$$

وواضح ان قيمة X_1 و X_2 التي تجعل Z اكبر ما يمكن هي التي يجب اختيارها اي ان مسالة البرمجة الخطية المطلوب حلها في هذه الحالة تعطى بالنموذج الرياضي الاتي:

$$\left.\begin{aligned} \textit{Maximize} \quad & Z = X_1 + 2X_2 \\ & \textit{subject to} \\ & 2X_1 + 4X_2 \le 48 \\ & 4X_1 + 2X_2 \le 84 \\ & X_2 \ge 7 \\ & X_1, X_2 \ge 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (12)$$

وما يقال عن معاملات المتغيرات لدالة الهدف في حالة الربح C_1 و C_2 اي اختيار اعلى قيمة لدالة الهدف، ايضاً يقال عن معاملات المتغيرات لدالة الهدف ، اذا كانت دالة الهدف دالة كلفة ويجب تحقيق اقل كلفة اي (Minimize) اي اختيار قيمة دالة الهدف اصغر ما يمكن وتكون قيم C_1، C_2 هي قيم كلفة الوحدة الواحدة من X_1 ، X_2 بعد ان كانت في دالة الهدف من نوع Maximize ارباح لـ X_1 و X_2.

وبالرجوع الى النموذج (12) فقد استعمل المصدر المحدود وهو عدد الساعات التشغيلية المتاحة مثلاً ، وهو الجانب الايمن في القيد الاول والثاني والشئ نفسه يكون اذا استعمل رأس المال او المواد الاولية او العمالة مثلاً للمصدر المحدود فهنا الامثلة كثيرة ومتعددة ويمكن تطبيق البرمجة الخطية في اي قطاع من القطاعات، وسنورد امثلة اخرى لتوضيح ما تقدم ذكره.

<u>مثال (2) : الخط الامثل للانتاج</u>

تنتج احدى الشركات نوعين من السلع، نوع A ونوع B، تُصنَع كل سلعة على ثلاث مراحل كل مرحلة في احد الاقسام الثلاثة الموجودة في الشركة، فاذا كان تصنيع السلعة A يحتاج الى ساعتين عمل في القسم الاول وساعة عمل في القسم الثاني واربع ساعات عمل في القسم الثالث ويحتاج تصنيع السلعة B الى ساعتين عمل في كل قسم كما ان عدد ساعات العمل المتاحة في القسم الاول هي (160) ساعة عمل اسبوعيا وفي القسم الثاني (120) ساعة عمل اسبوعيا وفي القسم الثالث (280) ساعة عمل اسبوعياً واذا كان ربح الوحدة الواحدة من السلعة A هو (2) دينار ومن السلعة B هو (3) دينار.

المطلوب: نموذج برمجة خطية لتحديد حجم الانتاج الامثل من السلعتين اذا كان هدف الشركة هو الحصول على اكبر ربح ممكن.

الحل : لتسهيل فهم المشكلة نضعها على شكل جدول (هذه الخطوة في التمارين الاولى لتسهيل الحل بسهولة).

السلعة	الوقت اللازم للتصنيع			ربح الوحدة بالدينار
	القسم الأول	القسم الثاني	القسم الثالث	
A	2	1	4	2
B	2	2	2	3
ساعات العمل المتاحة	160	120	280	

تكوين النموذج :

1. تحديد المتغيرات المجهولة والتعبير عنها برموز جبرية، ولذلك:

- نفرض عدد الوحدات المنتجة من السلعة A هو X_1.
- نفرض عدد الوحدات المنتجة من السلعة B هو X_2.

2. تحديد القيود والتعبير عنها بمعادلات او متباينات او خليط منها.

والقيود هنا هي ان الوقت اللازم للتصنيع في كل قسم محدود ويجب ان نتجنب تجاوز هذا الحد، لاحظ ان الوقت اللازم للتصنيع يتوقف على الكمية المنتجة من السلعة A والسلعة B.

بالنسبة للقسم الاول: الوقت اللازم للتصنيع (المتاح) = (عدد الوحدات المنتجة من السلعة A) * (الوقت اللازم لتصنيع الوحدة الواحدة) + (عدد الوحدات المنتجة من السلعة B) * (الوقت اللازم لتصنيع الوحدة الواحدة من السلعة B)، ويجب ان لايتجاوز عدد الساعات العمل المتاحة في القسم الاول وكما في المتباينة الآتية :

$$2X_1 + 2X_2 \leq 160$$

ويصار الى الشيء نفسه بالنسبة للقسمين الثاني والثالث ايضا وكما في المتباينات الآتية:

$X_1 + 2X_2 \leq 120$ بالنسبة للقسم الثاني

$4X_2 + 2X_2 \leq 280$ بالنسبة للقسم الثالث

ولأن عدد الوحدات المنتجة لا يمكن أن يكون سالبا ، وعلى النحو الآتي :

$$X_1 \geq 0 \quad , \quad X_2 \geq 0$$

3. تحديد دالة الهدف

$$Z = 2X_1 + 3X_2$$

المثلى من X_1 و X_2 التي تجعل دالة الهدف Z

Max.

$$Max \quad Z = 2X_1 + 3X_2$$

$$\text{subject to constraints}$$

$$2X_1 + 2X_2 \leq 160$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 120$$

$$4X_1 + 2X_2 \leq 280$$

$$X_1 \geq 0 \;,\; X_2 \geq 0$$

مثال (٦):

تستخدم احدى افران صهر الزجاج ماكنات للنفخ الآلي لانتاج اغلفة المصابيح الكهربائية (البالونات) ويمكن انتاج نوعين رئيسين على هذه الماكنات البالون العادي والطاقة القصوى الانتاجية له (48) مليون بالونة سنوياً والبالون الكبير والطاقة القصوى الانتاجية له (20) مليون بالونة سنوياً، ويجب ان توفر سنويا على الاقل (25) مليون بالونة من الطرازات العادية التي يجب ان لا تزيد عن (35) مليون بالونة لظروف التخزين ويجب ان توفر على الاقل سنويا (3) مليون بالونة من الطرازات الكبيرة على انه في كل الاحوال يجب ان تكون نسبة الطرازات العادية خمس مرات على الاقل بالنسبة للطرازات الكبيرة، كذلك تحقق الطرازات الكبيرة عائداً قدره ضعف البالونات الصغيرة.

اذا فرضنا ان الطاقة الانتاجية الكلية (100%) فان انتاج مليون من الطرازات الكبيرة يستنفذ (5%) او $\frac{1}{20}$ من الطاقة المتاحة وانتاج مليون من الطرازات العادية (الصغيرة) يستنفذ (2.08%) او $\frac{1}{48}$ من الطاقة المتاحة وبذلك يكون النموذج الرياضي للمسألة السابقة كما يأتي:

الحل: X_1 = الكميات المنتجة من البالونات الكبيرة (مقدرة بالمليون)

X_2 = الكميات المنتجة من البالونات العادية (الصغيرة) (مقدرة بالمليون)

$$Max.\quad Z = 2X_1 + X_2$$

$$S.T.$$

$$5X_1 + 2.08X_2 \le 100 \qquad (a)$$

$$X_2 \ge 25 \qquad (b)$$

$$X_2 \le 35 \qquad (c)$$

$$X_1 \ge 3 \qquad (d)$$

$$\frac{X_2}{X_1} \ge 5 \qquad (e)$$

$$X_1 , X_2 \ge 0 \qquad (f)$$

ومما تجدر الاشارة اليه ان الحرفين (s.t.) هما اختصاراً للعبـــارة subject to constraints، وكما يمكن الاستعاضة عن القيدين (c , b) بالقيد الآتي:

$$25 \le X_2 \le 35$$

<u>مثال (4) :</u>

شركة شحن تمتلك نوعين من الشاحنات A و B كل شاحنة من النوع A فيهـــا $20m^3$ من الحيز المبرد و $30m^3$ من الحيز غير المبرد، بينما كل شاحنة من النوع B فيها $20m^3$ من الحيز المبرد و $10m^3$ من الحيز الغير مبرد. اراد احد التجار شحن كمية من البضاعة لمـــسافة معينة وكانت بضاعته تتطلب $160m^3$ من الحيز المبرد و $120m^3$ من الحيز غير المبرر. واذا كانت الشركة تعلم بان كل شاحنة من النوع A تستهلك (300) غالون من الوقود لقطع المسافة بينما كل شاحنة من النوع B تستهلك (200) غالون من الوقود نفسه لقطع المسافة.

المطلوب: حدد عدد الشاحنات التي يجب استعمالها من كل نوع لنقل البضاعة بحيث تكون كمية الوقود المستهلكة اقل ما يمكن عن طريق تكوين نموذج برمجة خطية.

<u>الحل:</u> ليكن عدد الشاحنات من النوع A = X

ليكن عدد الشاحنات من النوع B = Y

ويكون برنامج البرمجة الخطية المعبر للمشكلة الانفة الذكر كالاتي:

$$Min. \quad Z = 300X + 200Y$$
$$S.T.$$
$$20X + 20Y \le 160$$
$$30X + 10Y \le 120$$
$$X, Y \ge 0$$

Min تعني اختصارا لكلمة Minimize

مثال (5) :

جمعية فلاحية تمتلك قطعة ارض مساحتها 200 دونم تستطيع زراعتها بنوعين من المحاصيل A و B. فاذا كانت زراعة الدونم الواحد من الارض بالمحصول A يتطلب يوم عمل واحد و 10 دنانير من المصاريف، بينما زراعة دونم واحد من الارض بالمحصول B يتطلب 4 أيام عمل و 20 دينار من المصاريف. وتعلم الجمعية انها تربح 40 دينار عن كل دونم يزرع بالمحصول A وتربح 60 دينارا من كل دونم تزرعه بالمحصول B. وان عدد أيام العمل السنوية المتوفرة للجمعية يساوي 320 يوم عمل وراس المال المتوفر للجمعية 2200 دينار.

المطلوب: حدد عدد الدونمات الواجب زراعتها من كل محصول لاجل تحقيق الجمعية لأكبر ربح ممكن. وذلك بتكوين نموذج برمجة خطية.

الحل: ليكن عدد الدونمات التي تزرع بالمحصول X = A

ليكن عدد الدونمات التي تزرع بالمحصول Y = B

$$Max. \quad Z = 40X + 60Y$$
$$S.T.$$
$$X + 4Y \le 320$$
$$10X + 20Y \le 2200$$
$$X + Y \le 200$$
$$X, Y \ge 0$$

الدرجة الاولى وهي معادلات آنية، وسيتم ذكر هذه الطريقة بحل بعض المعادلات المحتواة من قبل بعض نماذج البرمجة الخطية.

٣٣

1. الطريقة البيانية Graphical Method :

1. تصلح هذه الطريقة لحل مشاكل البرمجة الخطية والتي تحتوي على متغيرين فقط.

2. تستخدم هذه الطريقة اذا كانت المتغيرات مقيدة او غير مقيدة بالاشارة.

وتعتبر هذه الطريقة من الطرق البسيطة والتي تعطي نتائج دقيقة الا انها طريقة غير كفوءة في معالجة مشكلات البرمجة الخطية في الحياة العملية.

الخطوات:

1. نحول القيود من متباينات الى معادلات.

2. نعوض بأحد المتغيرات في المعادلة الواحدة بقيمة صفر لأستخراج قيمة المتغير الاخر، ثم نكرر ذلك بالنسبة للمتغير الاخر، وبذلك تصبح لدينا نقطتين لكل معادلة (مستقيم)، وبوساطة هاتين النقطتين يمكن رسم المستقيم الذي تمثله المعادلة.

3. بعد رسم جميع المستقيمات التي تمثل القيود يتم تحديد منطقة الحل الممكن (Region of feasible solution) التي تسمى بالمنطقة المحدبة (Convex set).

4. تحدد منطقة الحل الاساسي الابتدائي المقبول (منطقة الحلول المقبولة) (The starting basic feasible solution) ويمكن لفظها .S. B. F. S إذ تحقق هذه المنطقة جميع القيود في وقت واحد.

5. تحدد نقطة الحل الامثل (Optimal solution) التي تمثل احدى النقاط على الاقل الواقعة على تقاطعات المستقيمات الممثلة لمنطقة الحل الاساسي الابتدائي المقبول التي تسمى بنقاط التطرف (extreme points)، التي تجعل الارباح اعظم ما يمكن اذا كانت دالة الهدف تعظيم .Max او أقل ما يمكن اذا كانت دالة الهدف متدنية .Min .

6. نرسم على المستوى الاحداثيين (الافقي والعمودي) ليمثل احدهما المتغير X_1 وكميته ويمثل الاخر X_2 وكميته.

ولتحديد الحل الامثل نستعمل الاسلوب الآتي:

الاسلوب الاول لتحديد الحل الامثل:

بعد رسم جميع المستقيمات على المستوى نحدد نقاط التطرف (extreme point) (وهي النقاط التي تحيط بمنطقة الحلول الممكنة) ونختبر كل نقطة منها بالتعويض عنها في دالة الهدف والنقطة التي تجعل دالة الهدف اكبر ما يمكن، تكون هي التي تمثل الحل الامثل، اذا كانت دالــة الهدف من نوع تعظيم .Max والعكس بالعكس. أي انّ النقطة التي تجعل دالة الهدف اقــل مــا يمكن في حالة كون دالة الهدف من النوع المتدني .Min هي التي تمثل الحل الامثــل. وحــل الامثلة الآتية توضح ذلك.

مثال (19) :

أوجد قيم X_1 و X_2 المثلى التي تجعل دالة الهدف اكبر ما يمكن او يكون منطوق السؤال علــى النحو الآتي. أوجد الحل امثل لنموذج البرمجة الخطية المثالي:

$$Max. \quad Z = 4X_1 + 3X_2$$

$$S.T.$$

$$5X_1 + 3X_2 \leq 30$$

$$2X_1 + 3X_2 \leq 21$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

القيد الاول: نجعله عبارة عن معادلة اي نستبدل علامة الاقل او تساوي بالمساواة.

$$5X_1 + 3X_2 = 30$$

$X_1 = 0 \quad , \quad X_2 = 10 \quad (0,10)$ نعوض عن X_1 بقيمة صفر

$X_1 = 6 \quad , \quad X_2 = 0 \quad (6,0)$ نعوض عن X_2 بقيمة صفر

القيد الثاني: ايضاً نستبدل علامة الاقل او تساوي بالمساواة.

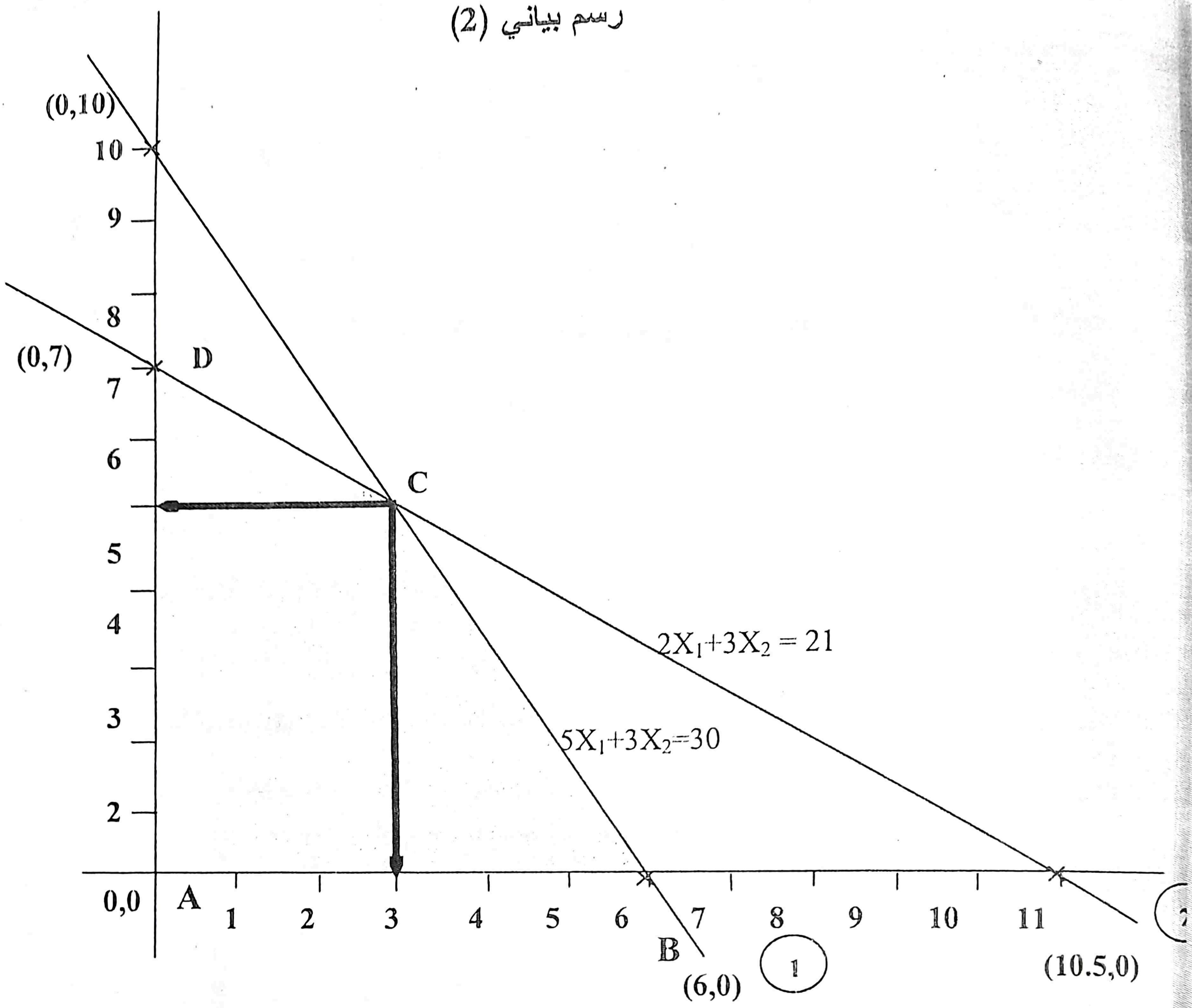
$$2X_1 + 3X_2 = 21$$

$X_1 = 0 \quad , \quad X_2 = 7 \quad (0,7)$ نعوض عن X_1 بقيمة صفر

$X_1 = 10.5 \quad , \quad X_2 = 0 \quad (10.5,0)$ نعوض عن X_2 بقيمة صفر

بعد هذا يتم رسم المستقيمات على المستوي وكما يلي:

رسم بياني (2)



بعد هذا تُحدّد منطقة الحلول الممكنة وحسب ما هو مطلوب من القيود وهي المنطقة التي تحقق جميع القيود في وقت واحد، وهي كما مبين في الشكل اعلاه (A, B, C, D)، وبما ان احداثي جميع النقاط معلومة وهي (A, B, D) ماعدا النقطة (C) فيتم تحديد احداثيتها على النحو الآتي :

الوسيلة الاولى: ويقتضي هذا الاسلوب إنزال اعمدة من النقطة المراد معرفة احداثياتها مثل (C) على المحورين العمودي والافقي ويتقاطع هذين العمودين مع المحاور يتعين احداثي النقطة (C) على المحور العمودي وعلى المحور الافقي.

الوسيلة الثانية: الاسلوب يتضمن احدى الطرق الرياضية بما ان النقطة (C) تولدت من تقاطع المستقيمين الاول والثاني، فأن المستقيمان يتقاطعان بالطريقة الجبرية (راجع الفقرة 2-6 من هذا الفصل) وهي الحذف او التعويض وعلى النحو الآتي :

بما ان معاملي المتغير X_2 متساويان فيتم تغيير اشارة احد المعادلات حتى تتم عملية الحذف

$$
\begin{array}{ll}
5X_1 + 3X_2 = 30 & \text{.........}(1) \\
\mp 2X_1 \mp 3X_2 = \mp 21 & \text{.........}(2) \\
\hline
3X_1 = 9 & \\
\therefore X_1 = \frac{9}{3} = 3 &
\end{array}
$$

بعد ذلك تُستخرج قيمة المتغير X_2، وذلك بالتعويض بقيمة المتغير $X_1=3$ بأحدى المعادلتين اما (1) او (2) وليتم التعويض بالمعادلة الاولى

$$5(3) + 3X_2 = 30 \quad , \; 3X_2 = 15$$
$$X_2 = 5$$

اما تحديد نقطة الحل الامثل، فبعد ان يتم تحديد المنطقة المحدبة (Convex set) التي هي المحددة بالنقاط (A, B, C, D) التي تمثل منطقة الحلول الممكنة، وبعد ان يتم معرفة احداثيي جميع نقاط التطرف (النقاط المحيطة او التي تحدد منطقة الحلول الممكنة) يتم التعويض باحداثيي النقاط (نقاط التطرف) في دالة الهدف وكالآتي :

قيمة دالة الهدف عند الاحداثيات (X_1, X_2)	أحداثي نقاط التطرف (X_1, X_2)	نقاط التطرف Extreme
$Z_A = 0$	(0,0)	A
$Z_B = 24$	(6,0)	B
$Z_C = 27$	(3,5)	C
$Z_D = 21$	(0,7)	D

وبما ان النقطة C حققت أعلى عائد في دالة الهدف $Z_C = 27$ وبما ان دالة الهدف من نوع .Max فان نقطة C تحقق الحل الامثل، وتكون قيم المتغيرات $X_1=3$، $X_2=5$ وقيمة دالة الهدف $Z_C = 27$، وهذا هو القرار النهائي لحل المشكلة.

ملاحظة: (تكون نقطة واحدة على الاقل من نقاط التطرف تمثل الحل الامثل)، اي معنى هذا ممكن ان تكون هناك نقطتان تمثل الحل الامثل (سيتم ذكره لاحقاً).

الاسلوب الثاني لتحديد الحل الامثل :

أ. بعد تعيين وتحديد منطقة الحلول الممكنة (المنطقة المحدبة) والناتجة من تقاطع المستقيمات (القيود)، نرسم دالة الهدف التي تمر بنقطة الاصل للوهلة الاولى وهنا تصبح دالة الهدف (Z=0)، وبعد ذلك نرسم دوالاً للهدف لأكثر من مرة واحدة وبقيم أختيارية (افتراضية) وبخطوط موازية داخل منطقة الحلول الممكنة ومبتعدة شيئاً فشيئاً من نقطة الاصل (اي دالة الهدف الاولى التي تمر بنقطة الاصل).

ب. اذا كانت دالة الهدف تعظيم فهنا تكون ابعد نقطة من نقاط التقاطع (التطرف) او نقاط المنطقة المحدبة عن نقطة الاصل تمس احد المستقيمات الموازية لدالة الهدف تمثل الحل الامثل للمشكلة والعكس بالعكس صحيح اذا كانت دالة الهدف من نوع متدنية (تقليص Min.

وبأستعمال الاسلوب الثاني تكون الخطوات على النحو الآتي:

نرسم دالة الهدف بالقيم التي يتم اختيارها (الافتراضية) ويعني هنا ان قيم دالة الهدف تمر من خلال المنطقة المحدبة كالآتي:

1. عندما تكون دالة الهدف تساوي صفر، (Z=0) اي

$$4X_1 + 3X_2 = 0 \qquad ....(3)$$

وتستخرج قيم X_2 وذلك باعطاء X_1 قيم أفتراضية (مع ثبوت) قيمة دالة الهدف صفر المعادلة (3)، فيتم استخراج قيم X_2، وكما مبين بالجدول :

X_1	0	1	1.5	2	2.5
X_2	0	-1.33	-2	-2.6	-3.33

2. عندما تكون دالة الهدف تساوي 12، (Z=12) اي

$$4X_1 + 3X_2 = 12$$

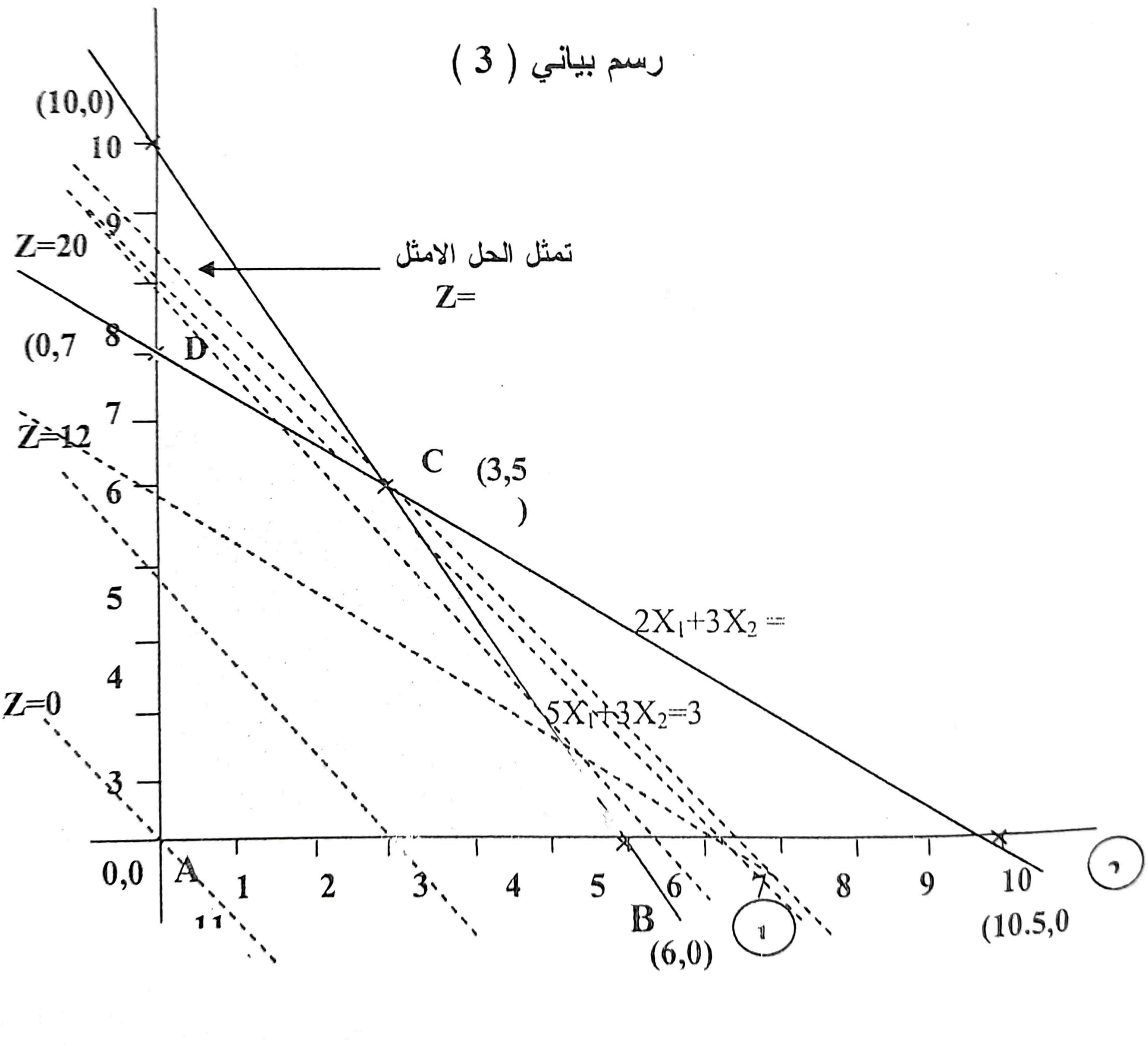
ويتم نفس الاجراء السابق عندما كانت (Z=0)، اي بأفتراض قيم للـ X_1 أفتراضية فيكون تبعاً لذلك قيم مناظرة للـ X_2 وكما في الجدول الاتي :

X_1	0	3	1	1.5	2
X_2	4	0	2.6	2	1.33

3. وكذلك نتبع الخطوات نفسها عندما تكون دالة الهدف تساوي 20 أي ($Z=20$).

X_1	5	3.5	0.5	1	2
X_2	0	2	6	5.3	4

ونبقى نعطي قيم لدالة الهدف متتالية الى ان يتقاطع احد المستقيمات المتوازية لدالة الهدف مع ابعد نقطة من نقاط المنطقة المحدبة منطقة الحلول الممكنة وهي هنا النقطة C (وكما هو واضح من خلال الجداول السابقة أن قيم المتغير X_1 او المتغير X_2 تكون أفتراضية لأستخراج قيم المتغير الأخر) وكما هو واضح من الرسم البياني.



وستتقاطع المستقيمات المتوازية لدالة الهدف مع نقطة C (التي تكون أبعد نقطة عن نقطة الاصل وتتقاطع مع المستقيمات) وبذلك تكون نقطة C هي الحل الامثل اي $X_1=3$، $X_2=5$، $Z=27$.

مثال (20) :

أوجد قيم X_1 و X_2 المثلى وقيم دالة الهدف المناظرة لهما لنموذج البرمجة الخطية الآتي:

$$Min. \quad Z = 2.6X_1 + 1.8X_2$$
$$S.T.$$
$$10X_1 + 12.6X_2 \geq 50$$
$$0.15X_1 + 0.6X_2 \geq 1$$
$$1.2X_1 + 0.3X_2 \geq 3$$
$$0.55X_1 + 0.25X_2 \geq 2$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

وبأتباع نفس الاجراءات لتحديد قيم النقاط من القيود ومثلما جرى في الاسـلوب الاول لتحديـد الحل الامثل.

القيد الاول

$10X_1+12.6X_2 = 50$, $X_1=0$ $X_2=3.9$

$X_1=5$ $X_2=0$

نقاط القيد الاول (0,3.9) و (5,0)

القيد الثاني

$0.15X_1+0.6X_2 = 1$, $X_1=0$ $X_2=1.6$

$X_1=6.6$ $X_2=0$

نقاط القيد الثاني (0,1.6) و (6.6,0)

القيد الثالث

$1.2X_1+0.3X_2 = 3$, $X_1=0$ $X_2=10$

$X_1=2.5$ $X_2=0$

نقاط القيد الثالث (0,10) و (2.5,0)

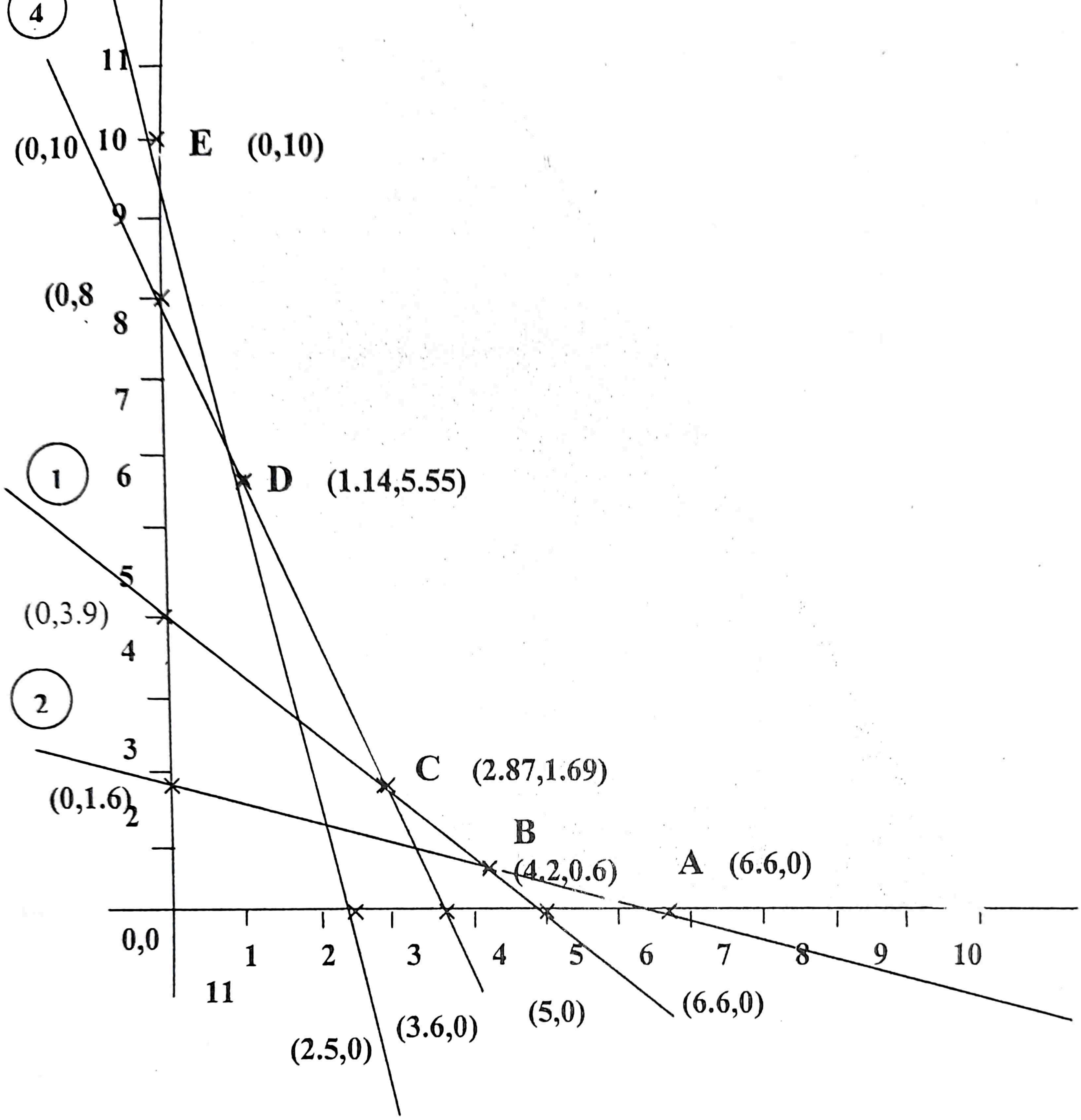
القيد الرابع

$0.5X_1+0.25X_2=2$, $X_1=0$ $X_2=8$

$X_1=3.6$ $X_2=0$

نقاط القيد البرابع (0,8) و (3.6,0)

رسم بياني (4)



ويُحدد الحل الامثل باستعمال الاسلوب الاول وعلى النحو الآتي:

بعد تحديد منطقة الحلول الممكنة (المنطقة المحدبة، منطقة الحلول الممكنة Convex set) التي حددت في هذا المثال بالمنطقة (A, B, C, D, E) (رسم بياني رقم 4) كما في الجدول الاتي:

نقاط التطرف Extreme points	احداثي نقاط التطرف (X_1,X_2)	قيمة دالة الهدف عند الاحداثيات (X_1,X_2)
A	(6.6,0)	$Z_A = 17.16$
B	(4.2,0.6)	$Z_B = 12$
C	(2.87,1.69)	$Z_C = 10.504$
D	(1.114,5.55)	$Z_D = 12.886$
E	(0,10)	$Z_E = 18$

وبما ان دالة الهدف من نوع متدنية (تقليص) .Min فيجب اختيار النقطة C اذ أنتجت أقل قيمة لدالة الهدف وكانت قيمتها $Z_C = 10.504$ وبهذا تكون نقطة الحل الامثل عند الاحداثيات $X_1=2.87$ و $X_2=1.69$.

7-2 حالات خاصة لحلول البرمجة الخطية عند التطبيق :

ونسعى في هذه الفقرة سوف نتطرق الى التعرف على انواع الحلول التي تنتج عنها حلول مشكلة البرمجة الخطية وبشكل عام سواء أكان ذلك في الطريقة البيانية أم بطريقة السمبلكس (التي سيأتي توضيحها)

1. الانحلال Degeneracy :

ويحصل هذا النوع من الحلول اذا كانت عدد المتغيرات الاساسية والتي تكون قيمتها اكبر من صفر، أقل من عدد القيود (اي تكون قيمة احد المتغيرات مساوية الى الصفر)، فيكون الحل عبارة عن حل منحل Degenerate وعند حل المثال الاتي سيتوضح ذلك.

مثال (21) :

اوجد الحل الامثل لنموذج البرمجة الخطية الآتي :

$$Max. \quad Z = 3X_1 + 9X_2$$

$$S.T.$$

$$X_1 + 4X_2 \le 8$$

$$X_1 + 2X_2 \le 4$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

الحل :

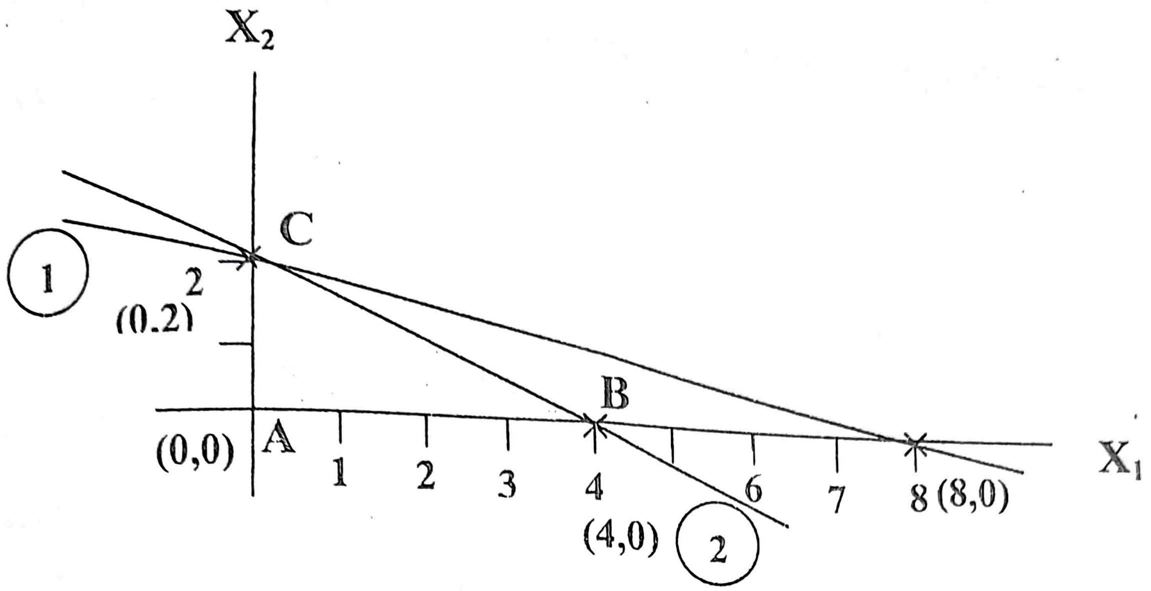
$X_1 + 4X_2 = 8$, $X_1 = 0$ $X_2 = 2$ $(0,2)$

$X_1 = 8$ $X_2 = 0$ $(8,0)$

$X_1 + 2X_2 = 4$, $X_1 = 0$ $X_2 = 2$ $(0,2)$

$X_1 = 4$ $X_2 = 0$ $(4,0)$

رسم بياني (5)



قيمة دالة الهدف عند الاحداثيات (X_1,X_2)	احداثي نقاط التطرف (X_1,X_2)	نقاط التطرف Extreme points
$Z_A = 0$	(0,0)	A
$Z_B = 12$	(4,0)	B
$Z_C = 18$	(0,2)	C

وبهذا تكون نقطة التطرف C هي الحل الامثل لتحقيقها اكبر عائد وبهذا تكون قيم المتغيرات $X_1=0$ و $X_2=2$ وبهذا انطبق تعريف الحل المنحل على نتيجة الحل.

2. تعدد الحلول المثلى Al ternative optimal solution :

ونحصل على هذا النوع من الحلول عندما تكون هناك اكثر من نقطة واحدة في منطقة الحلول الممكنة تعطي القيمة نفسها لدالة الهدف التي تكون اعلى القيم في حالة كون دالة الهدف من نوع تعظيم .Max او تكون اقل القيم حين تكون دالة الهدف من نوع متدنية (تقليص) .Min. في حالة تطبيق طريقة السمبلكس هناك جدول آخر (فضلاً عن جدول الحل الامثل) يعطي قيماً لمتغيرات آخرى ولكن قيمة دالة الهدف تبقى ثابتة للجدولين على التوالي مع التغير في المتغيرات الاساسية ، مثال ذلك :

مثال (22) :

$$Max. \quad Z = X_1 + 2X_2$$

$$S.T.$$

$$X_1 + 2X_2 \le 10$$

$$X_1 + X_2 \ge 1$$

$$X_2 \le 4$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

الحل :

$X_1 + 2X_2 = 10$, $X_1 = 0$ $X_2 = 5$ $(0,5)$

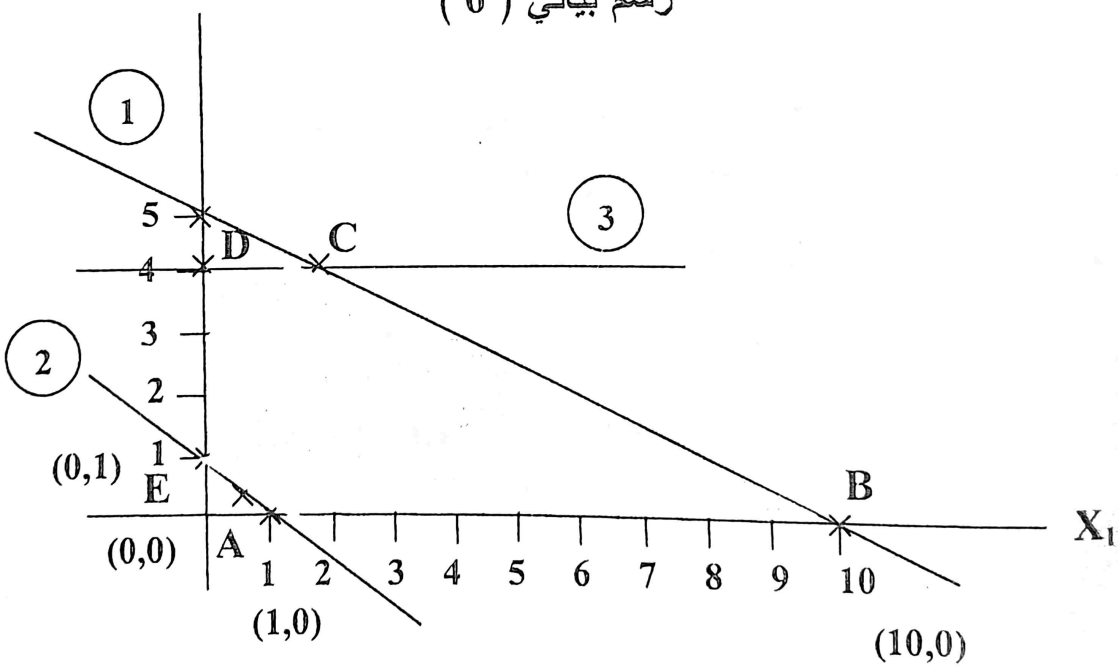
$X_1 = 10$ $X_2 = 0$ $(10,0)$

$X_1 + X_2 = 1$, $X_1 = 0$ $X_2 = 1$ $(0,1)$

$X_1 = 1$ $X_2 = 0$ $(1,0)$

$X_2 = 4$

رسم بياني (6)



قيمة دالة الهدف عند الاحداثيات (X_1,X_2)	احداثي نقاط التطرف (X_1,X_2)	نقاط التطرف Extreme points
$Z_A = 1$	(1,0)	A
$Z_B = 10$	(10,0)	B
$Z_C = 10$	(2,4)	C
$Z_D = 8$	(0,4)	D
$Z_E = 2$	(0,1)	E

وبقــيم $(Z_B = Z_C = 10)$ لدالة الهدف متساويتين قيمتين اعطت C و B نقطتي ان جدا وواضح للمتغيرات مختلفتين وهنا يعني وجود حرية لمتخذ القرار ان يأخذ واحدة من النقطتــين آنفتــي الذكر وايهما اصلح لحل المشكلة ولذلك اطلق على هذا النوع من الحلول هــو تعــدد الحلــول المثلى.

3. الحلول غير المحدودة Unbounded solution :

يكون هذا النوع من الحلول عندما تكون منطقة الحلول الممكنة منطقة مفتوحة وعند تعيين ايــة نقطة بعيدة عن النقطة التي تم تسميتها بالحل الامثل فممكن الحصول على حل أمثل آخر وهكــذا لاتوجد نهاية للحلول وكما في المثال الاتي:

<u>مثال (23) :</u>

$$Max. \quad Z = 2X_1 + X_2$$

$$S.T.$$

$$X_1 - X_2 \le 10$$

$$2X_1 \le 40$$

$$X_1, X_2 \ge 0.$$

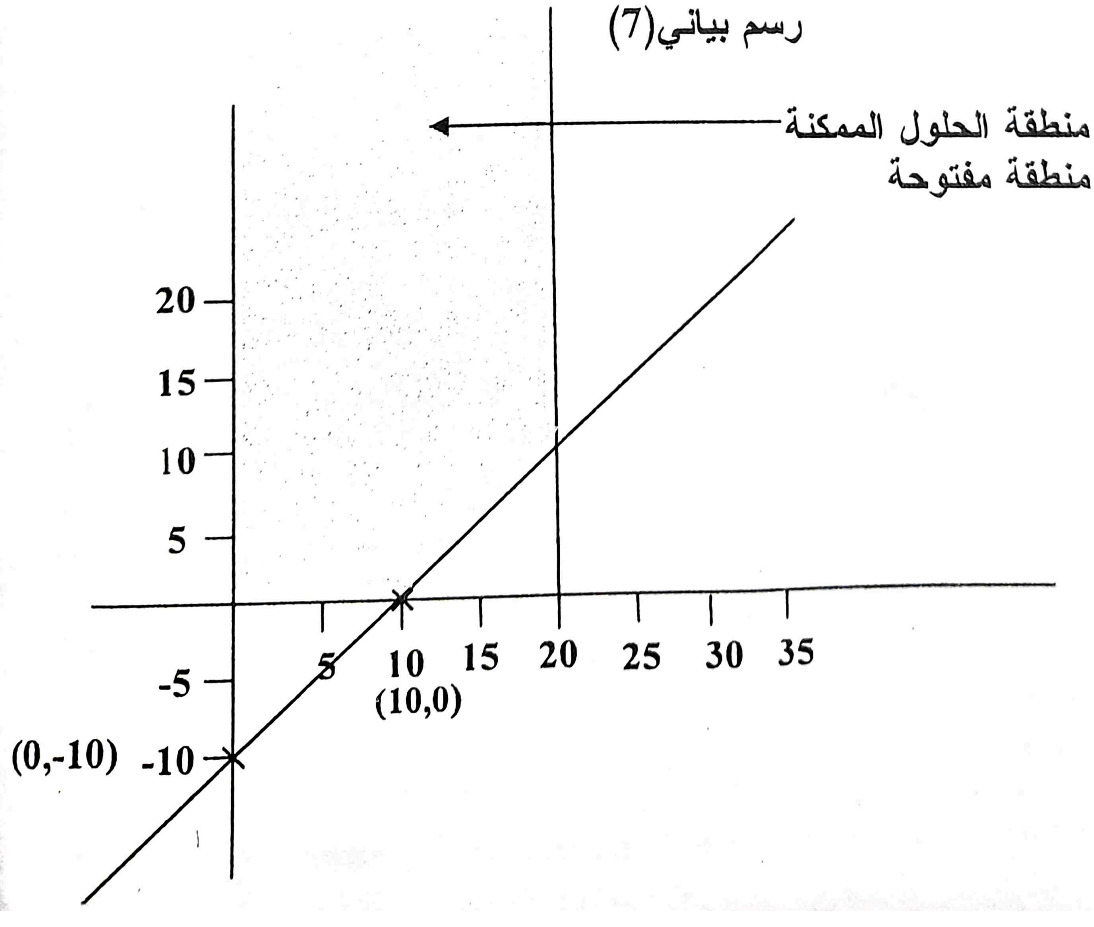
<u>الحل :</u>

$X_1 - X_2 = 10$, $X_1 = 0$ $X_2 = -10$ $(0,-10)$

$X_1 = 10$ $X_2 = 0$ $(10,0)$

$2X_1 = 40$, $X_1 = 20$

رسم بياني(7)



4. عدم وجود حلول مقبولة (Non – existing (or Infeasible) :

هنا يحصل هذا النوع من الحلول عندما لايمكن تعيين منطقة الحلول الممكنة ولايوجد هنا حل أساسي أبتدائي مقبول، اي قيود المشكلة البرمجة الخطية تكون بصيغة معينة بحيث تكون منطقة تقاطع القيود عبارة عن مجموعة خالية وكما يلي:

مثال (24) :

$$Min. \quad Z = 20X_1 + 15X_2$$

$$S.T.$$

$$5X_1 + 10X_2 \leq 25$$

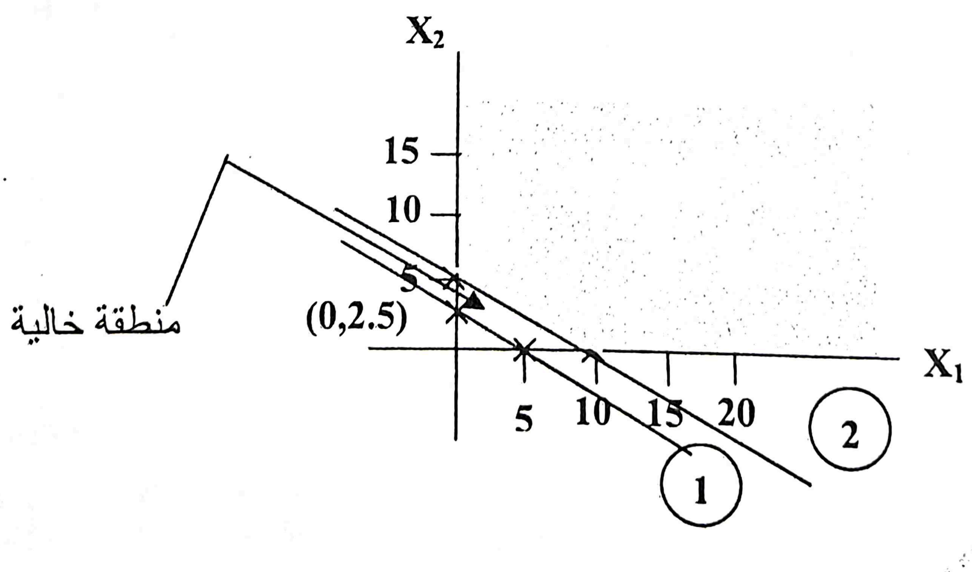
$$5X_1 + 10X_2 \geq 50$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

الحل :

$5X_1 + 10X_2 = 25$	$, X_1 = 0$	$X_2 = 2.5$	(0,2.5)
	$X_1 = 5$	$X_2 = 0$	(5,0)
$5X_1 + 10X_2 = 50$	$, X_1 = 0$	$X_2 = 5$	(0,5)
	$X_1 = 10$	$X_2 = 0$	(10,0)

رسم بياني (8)

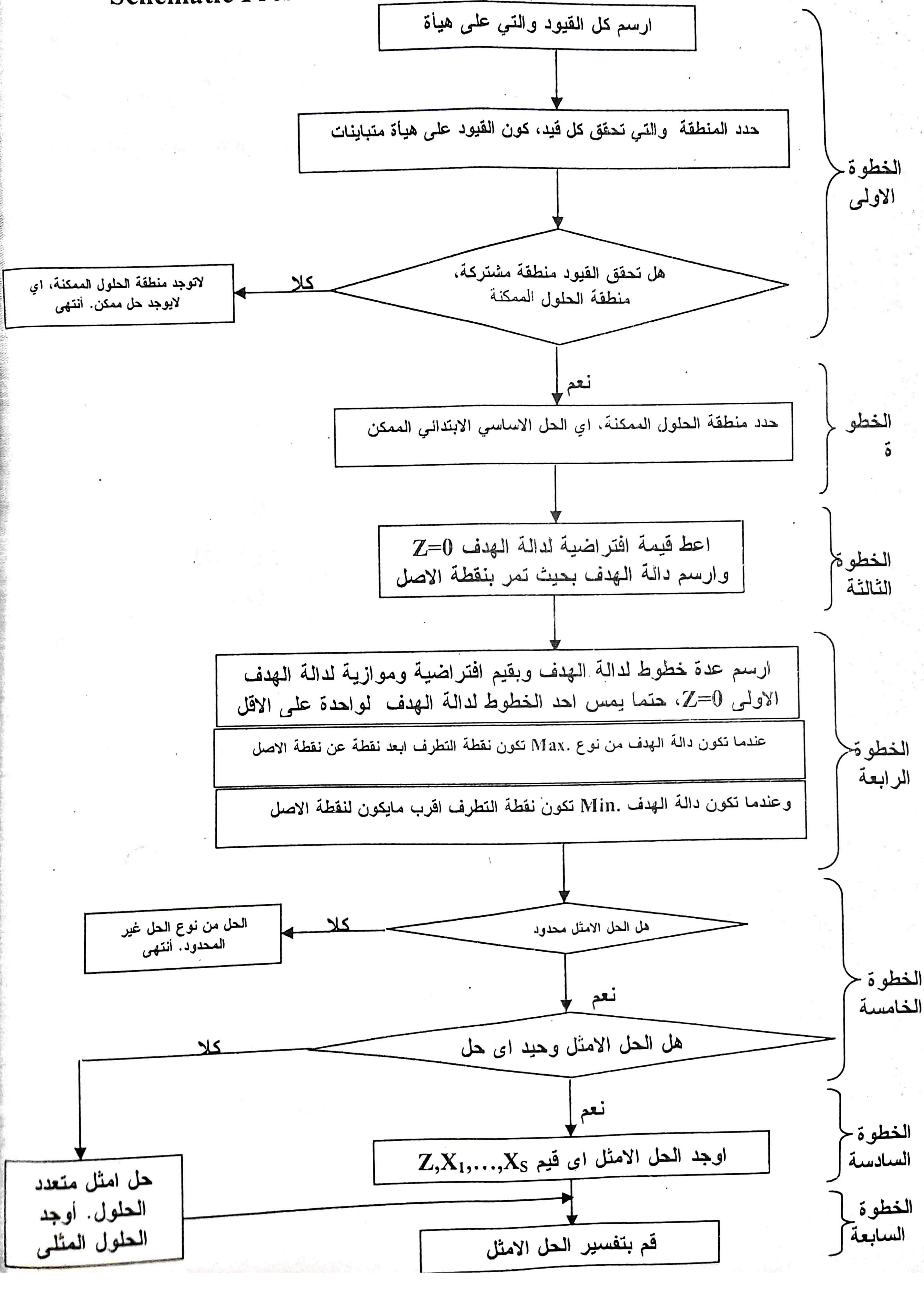


يتضح من الرسم البياني بانه لاوجود لمنطقة الحلول الممكنة ، أي لايوجد اتحاد (تقاطع) بين القيود

وسنورد المخطط الانسيابي لمراحل الحل بالطريقة البيانية.

مخطط انسيابي يوضح مراحل الطريقة البيانية ، وحسب الاسلوب الثاني :

Schematic Presentation of the Graphical solution method:



8-2 اشكال صيغ نموذج البرمجة الخطية :

Forms of linear programming model:

قبل الدخول في طريقة حل النموذج بطريقة السمبلكس Simplex method، علينا معرفة انواع الصيغ التي يمكن كتابة البرنامج الخطي على اساسها وهي ثلاثة انواع:

1. الصيغة العامة General form :

وشروط هذه الصيغة :

1. ان تكون دالة الهدف مكتوبة على شكل ,Max او .Min.
2. ان تكون القيود مكتوبة باشارة أقل او يساوي او اكبر او يساوي او على هيأة معادلة اي مساواة.
3. المتغيرات تكون اما مقيدة او غير مقيدة بالاشارة Restricted or unrestricted in sign وكما يلي:

$$\textit{Minimum or Maximum} \qquad Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \dots + C_nX_n$$

$$S.T.$$

$$\begin{array}{ll}
a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n & \leq, =, \geq b_1 \\
a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n & \leq, =, \geq b_2 \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + \dots + a_{in}X_n & \leq, =, \geq b_i \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \dots + a_{mn}X_n & \leq, =, \geq b_m \\
X_1, X_2, \dots, X_n \geq 0 &
\end{array}$$

2. الصيغة القانونية Conical form :

ومن شروط هذه الصيغة:

1. ان تكون دالة الهدف من نوع .Max فقط.
2. ان تكون القيود مكتوبة على متباينة باشارة أقل او يساوي فقط.
3. ان تكون المتغيرات مقيدة بالاشارة Restricted variables .

ولتحقيق شروط هذه الصيغة وفي اي نوع من دوال الهدف او القيود او المتغيرات نقوم بالمعالجات الآتية:

المعالجات :

1. فاذا كانت المتغيرات غير مقيدة بالاشارة Unrestricted فيتعالج كل متغير بافتراضنا ان المتغير غير مقيد بالاشارة حاصل طرح (فرق) متغيرين مفترضين مقيدين بالاشارة مثلا اذا كان Y_i متغير غير مقيد بالاشارة وكالآتي :

$$Y_i = Y_i' - Y_i'' \qquad Y_i , Y_i'' \geq 0$$

أو

$$Y_i = L - M \qquad L, M \geq 0$$

او X_i متغير مقيد بالاشارة

$$X_i = X_i' - X_i'' \qquad X_i', X_i'' \geq 0$$

ولنفرض

$$Y_i'' = M = 6 \qquad , Y_i' = L = 0$$

$$\therefore \; Y_i = 0 - 6 = -6$$

او

$$Y_i'' = M = 0 \qquad , Y_i' = L = 10$$

$$Y_i = 10 - 0 = 10$$

وبالطريقة نفسها يمكن افتراض

$$X_i'' = 4 \qquad , X_i' = 2$$

$$X_i = 2 - 4$$

وبالامكان افتراض Y_i او X_i كمتغيرين غير مقيدين بالاشارة

$$Y_i = g - k$$

$$k = 6 \; , \; g = 0$$

$$Y_i = 0 - 6 = -6$$

او في حالة X_i

$$X_i = d - f$$

$$f = 3 \;,\; d = 8$$

$$X_i = 8 - 3 = 5$$

وهكذا يجوز لنا ان نفترض اي متغيرين ولكن جرت العادة اذا كان المتغير غير المقيد X_i فيساوي حاصل طرح (فرق) X_i' و X_i'' وهو افتراض فقط.

2. اذا كانت دالة الهدف من نوع متدنية (تقليص) .Min فتتحول الى .Max وذلك بضرب الطرف الايمكن بـــ (-1) وكالآتي:

$$Min. \qquad Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots\ldots + C_nX_n$$

تصبح

$$Max. \qquad Z = -C_1X_1 - C_2X_2 - \ldots\ldots - C_nX_n$$

3. اذا كان الطرف الايسر للقيد مكتوباً على شكل قيمة مطلقة فيعالج بتحويل القيد الى متباينتين احداهما أقل او يساوي الطرف الايمن والثانية اكبر او يساوي الطرف الايمن، وبما ان شــروط الصيغة القانونية، يجب ان تكون أشارة المتباينة أقل او يساوي فيجب ضرب طرفــي المتباينــة التي من نوع اكبر او يساوي بـــ (-1) وكما يأتي:

$$\left| a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + \ldots\ldots + a_{1n}X_n \right| \le b_1$$

فيتحول

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + \ldots\ldots + a_{1n}X_n \le b_1 \qquad \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + \ldots\ldots + a_{1n}X_n \ge -b_1 \qquad \ldots\ldots\ldots(2)$$

ولتحقيق شروط الصيغة القانونية نضرب المعادلة (2) بـــ (-1) لتصبح

$$-a_{11}X_1 - a_{12}X_2 - a_{13}X_3 - \ldots\ldots - a_{1n}X_n \le b_1$$

4. اذا كانت أشارة القيد اكبر او يساوي تحول أشارة القيد الى اقل او يساوي بــضرب طرفــي المتباينة بـــ (-1) وكما يأتي:

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + \ldots\ldots + a_{1n}X_n \ge b_1$$

فيصبح

$$-a_{11}X_1-a_{12}X_2-a_{13}X_3-.....-a_{1n}X_n \le -b_1$$

5. اذا كانت أشارة القيد مساواة فيتحول القيد الى متباينتين احداهما أقل أو تساوي الطرف الايمن والثانية اكبر او يساوي الطرف الايمن ثم يتم تحويل المتباينة الثانية الى أقل او يساوي بضرب طرفيها بـــ (-1)

$$a_{11}X_1+a_{12}X_2+a_{13}X_3+.....+a_{1n}X_n = b_1$$

فهذا القيد يكافئ القيدين الآتيين:

$$a_{11}X_1+a_{12}X_2+a_{13}X_3+.....+a_{1n}X_n \le b_1 \qquad ....(1)$$
$$a_{11}X_1+a_{12}X_2+a_{13}X_3+.....+a_{1n}X_n \ge b_1 \qquad ....(2)$$

وحتى يتم تحقيق شروط الصيغة القانونية بوجوب كون جميع القيود يجب ان تكون اضـــغر او يساوي ولذا سنضرب المتباينة (2) بـــ (-1) لتصبح

$$-a_{11}X_1-a_{12}X_2-a_{13}X_3-.....-a_{1n}X_n \le -b_1$$

__مثال (25) :__

حول البرنامج الخطي الآتي الى الصيغة القانونية

$$\begin{aligned}
&Max. \quad Z = X_1+2X_3-X_4\\
&\quad S.T.\\
&X_1+X_2+X_3+X_4 = 10\\
&X_2+X_4 \ge 4\\
&X_1+X_3 \le 8\\
&|X_2+X_3-X_4| \le 5\\
&X_1 \ge 0 \quad , X_2 \ge 0
\end{aligned}$$

غير مقيدة بالاشارة X_4 ، X_3

__الحل :__ ابتداءً نفرض ان

$$X_3 = X_3' - X_3''$$
$$X_4 = X_4' - X_4''$$

ويصبح النموذج اعلاه كما يأتي:

$$Max. \quad Z = X_1 + 2(X_3' - X_3'') - (X_4' - X_4'')$$

$$S.T.$$

$$X_1 + X_2 + X_3' - X_3'' + X_4' - X_4'' \le 10$$

$$-X_1 - X_2 - X_3' + X_3'' - X_4' + X_4'' \le -10$$

$$-X_2 - X_4' + X_4'' \le -4$$

$$X_1 + X_3' - X_3'' \le 8$$

$$X_2 + X_3' - X_3'' - X_4' + X_4'' \le 5$$

$$-X_2 - X_3' + X_3'' + X_4' - X_4'' \le 5$$

$$X_1, X_2, X_3', X_3'', X_4', X_4'' \ge 0$$

3. الصيغة القياسية Standard form :

يستعمل هذا النوع من الصيغ في حل نماذج البرمجة الخطية بوساطة طريقة السمبلكس (Simplex) ومن شروط هذه الصيغة :

1. ان تكون متغيرات النموذج مقيدة بالاشارة.

2. ان يحتوي البرنامج الخطي على هيأة قيود مكتوبة على شكل معادلات. فاذا كانت اشارة المتباينة أصغر أو يساوي، اقل او يساوي يضاف الى الطرف الايسر متغير وهمي (Slack variable) او ما يسمى بمتغيرات الموازنة ويرمز له بالرمز ((S)) واذا كانت اشارة المتباينة اكبر او يساوي يطرح من الطرف الايسر المتغير (S) وتسمى بالمتغيرات الفائضة (Subtracting, a surplus variable) وكما يأتي:

اولاً: في حالة كون القيد اصغر او يساوي (أقل او يساوي)

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3 + ... + a_{1n} X_n \le b_1$$

يصبح

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3 + ... + a_{1n} X_n + S_1 = b_1$$

ثانياً: في حالة كون القيد اكبر او يساوي

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3 + ... + a_{1n} X_n \ge b_1$$

يصبح القيد كما يأتي:

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + \ldots + a_{1n}X_n - S_1 = b_1$$

3. يمكن ان تكون دالة الهدف من نوع .Max او .Min

ولمزيد من المعلومات عن المتغيرات الوهمية والمتغيرات الاصطناعية نورد تعريفهما وكما يأتي:

المتغيرات الوهمية Slack variables :

هي متغيرات تضاف الى نموذج البرمجة الخطية لتحقيق شروط الصيغة القياسية (القيود على هيأة معادلات)، اي اساسا لا علاقة بين طرفي المعادلة وفي حالة استغلال الجانب الايمن (المصدر) استغلالاً كاملاً من قبل المتغيرات الاساسية ($X_1, X_2, X_3, \ldots,$) في الجانب الايسر، ظهرت قيم الـ (S_i) في الحل الامثل عبارة عن اصفار. اما اذا كان المصدر غير مستغل استغلالاً كاملاً فهنا يظهر دور المتغير الوهمي وبقيم موجبة في الحل الامثل، للدلالة على أن المصدر في الجانب الايسر لم يُستغل بالكامل. وتكون تكاليف وارباح الـ (S_i) صفر دائماً، اي ان معامل (S_i) في دالة الهدف صفر، وان اضافة (S_i) ليس لها تأثير في دالة الهدف.

المتغيرات الاصطناعية Artificial variables :

تضاف المتغيرات الاصطناعية الى المتباينة الخطية التي تفصل بين طرفيها علامة من نوع أكبر او يساوي أوالمساواة وذلك بهدف الحصول على الحل الاساسي الممكن. وبعد ان يتم الحصول على هذا الحل (الحل الممكن) يجب ان يتم التخلص من هذه المتغيرات وأبعادها عن النموذج (كما سيأتي شرحه في حالة طريقة M– الكبيرة Big – M) وبعد ان يتم الاستفادة منها في الحصول على الحل الاساسي الممكن، وبحسب طريقة M الكبيرة، تظهر المتغيرات الاصطناعية بمعامل مقداره M في دالة الهدف اذا كانت من نوع تدنية (تقليص) .Min. وتظهر المتغيرات الاصطناعية في دالة الهدف بمعامل مقداره M– اذا كانت دالة الهدف من نوع تعظيم .Max اما في حالة طريقة ذات المرحلتين فتظهر المتغيرات الاصطناعية في دالة الهدف بمعاملات (1 ، 1–) في حالة كون دالتي الهدف من نوع .Min او .Max على التوالي وفي حالة تطبيق طريقة M نفترض ان M هي اكبر الارقام الموجودة في جدول السمبلكس.

وفي كل الاحوال يجب ان يكون الطرف الايمن موجباً، وفي حالة كونه سالب فيجب ضرب المعادلة في (1−).

2. طريقة السمبلكس Simplex method :

توصل الى هذه الطريقة عالم الرياضيات البريطاني G. Dantizg عام 1947 وتنطوي الطريقة على الفكرة الآتية:

تبدأ الطريقة بأيجاد حل مبدئي أساسي ممكن ثم التحرك الى حل أساسي ممكن يكون أفضل من الحل السابق وذلك باحلال احد المتغيرات الغير أساسية محل المتغيرات الاساسية في الجدول الاول وهنا يسمى بالمتغير الداخل (Entering variable)، ويتم اختياره على أساس نسبة مساهمته في تحسين دالة الهدف. اما المتغير الذي سيتم مغادرته والذي حل محله احد المتغيرات الاساسية فيسمى بالمتغير الخارج (Leaving variable) ويتم اختياره طبقاً لقاعدة تضمن أمكانية الحصول على حل جديد. وعندما يتم الوصول الى هذا الحل فانه سيكون لدينا نقطة بداية جديدة لتكرار العملية السابقة نفسها لتحديد حل اساسي ممكن افضل من ذلك الذي حصلنا عليه في المرحلة السابقة وتتوقف هذه العملية عندما نصل الى احد الحالات الآتية:

1. الحصول على حل نهائي ويكون الحل الامثل Optimal solution ويتضمن حالة تعدد الحلول Al- ternative وحالة الانحلال Degeneracy (راجع الفقرة 2-7 من هذا الفصل).
2. تحديد عدد لانهائي من الحلول Unbounded solutions.
3. المشكلة ليس لها حل ممكن (محدد) Non-existing or Infeasible solution.

ولتطبيق طريقة السمبلكس في حل نماذج البرمجة الخطية يجب اتباع الخطوات الآتية:

اولاً: تحويل النموذج الى الشكل الذي يتلاءم وتحديد الفائض من المحددات وفي هذه الحالة يتم اضافة عدد من المتغيرات الوهمية slack variables يساوي عدد المحددات في النموذج الى دالة الهدف وبمعامل مقداره صفر، والى كل محدد (قيد) من المحددات في النموذج وبمعامل مقداره واحد، فمثلاً لو كان هناك ثلاث محددات (قيود) فيضاف ثلاث من المتغيرات الوهمية لدالة الهدف (بمعاملات اصفار)، وبواقع متغير واحد لكل قيد من القيود الثلاثة (وبمعاملات مقدارها واحد)، وذلك بهدف الحصول على الصيغة القياسية لنموذج البرمجة الخطية.

ثانياً: تحويل المتباينات كافة الى متطابقات بعد أضافة المتغيرات الوهمية.

ثالثاً: وضع وترتيب معاملات المتغيرات الاساسية وغير الاساسية للمعادلات في نموذج البرمجة الخطية في جدول السمبلكس الذي يحتوي على اربعة اعمدة كما في الجدول اللاحق (شكل رقم 3)، ويكون العمود الاول لبيان معامل المتغيرات الاساسية في دالة الهدف في الجدول في (شكل رقم 3) ويرمز لها بـ C_B والعمود الثاني يبين المتغيرات الاساسية لهذا الجدول، اما العمود الثالث (اكبر الاعمدة) تظهر فيه معاملات المتغيرات الاساسية وغير الاساسية التي تحتويها المعادلات (القيود)، اما العمود الرابع فيبين كمية المصادر المتاحة والذي يرمز له بعمود b.

شكل رقم (3)

C_B	C_j / Basic	C_1 C_2 .... 0 0 0 .... X_1 X_2 .... S_1 S_2 S_3	b
0		a_{11} a_{12} 1 0 0	b_1
0		a_{21} a_{22} 0 1 0	b_2
.		. . . .	.
.		. . . .	.
.		. . . .	.
$Z_j - C_j$		Z_1-C_1 Z_2-C_2	Z =

ويمكن توضيح الرموز المستعملة في الجدول اعلاه كما يأتي:

C_B : هي معاملات المتغيرات الاساسية في دالة الهدف لذلك الجدول (ولأية مرحلة من مراحل جداول السمبلكس).

C_j : معاملات المتغيرات كافة (الاساسية وغير الاساسية) لدالة الهدف.

Basic : ويعني المتغيرات الاساسية لذلك الجدول من جداول السمبلكس (اي لكل مرحلة من مراحل السمبلكس اي لكل جدول للسمبلكس له متغيراته الاساسية الخاصة به).

Z_j-C_j : هو حاصل طرح معاملات المتغيرات كافة في دالة الهدف من حاصل ضرب صف معاملات المتغيرات الاساسية لذلك الجدول في حاصل ضرب اعمدة الجدول (العمود 3).

b : R. H. S : solution : هذا العمود يسمى بأحدى هذه التسميات وهو كمية المصدر المتا

رابعاً: لتحديد المتغير الداخل Entering variable وعمود المعاملات التابع لـذلك المتغيـر – وفي حالة كون دالة الهدف من نوع .Max يكون المتغير الداخل هو المقابل الى اقل كمية عددية (اعلى كمية بالسالب) موجودة في صف z_J-c_J والعكس صحيح اذا كانت دالة الهدف من نـوع . Min.

خامساً: ولتحديد المتغير الخارج Leaving variable، اي المتغيـر الـذي سـيغادر جـدول السمبلكس ويصبح متغيراً غير أساسي، بعد ان كان متغيراً اساسياً. ذلك هو المتغير الذي يقابل اقل حاصل من قسمة (Minimum Ratio) عناصر عمود b على عناصـر العمـود الـداخل وبالتناظر. ويهمل حاصل القسمة اذا كان المقسوم عليه صفراً او كمية سـالبة (احـد عناصـر العمود الداخل). واذا كانت كل عناصر العمود الداخل عبارة عن أصفار او كميات سالبة تـدلل هذه الحالة على النموذج يتمتع بحل غير ممكن.

سادساً: يجب تحديد قيمة المحور (pivot) وهي القيمة الناتجة من تقاطع قيم عمـود المتغيـر الداخل مع قيم صف المتغير الخارج.

سابعاً: ابتداءاً تستخرج قيم الصف المناظر الى صف المحور في جدول الـسمبلكس اللاحـق، وذلك بقسمة جميع قيم صف المحور على قيمة المحور.

ثامناً: لأستخراج القيم الموجودة في العمود المناظر الى عمود المحور (في جـدول الـسمبلكس اللاحق)، تكون هذه القيم عبارة عن أصفار، ما عدا القيمة المناظرة للمحور، اذ تكون عبارة عن واحد.

تاسعاً: أما بقية القيم الموجودة في الجدول فيتم استخراجها وفقاً للمعادلة الاتية، بما في ذلك قـيم عمود b للجدول

$$\text{القيمة الجديدة في الجدول اللاحق} = \text{القيمة المناظرة لها في الجدول السابق} - \frac{\text{القيمة المناظرة لها في عمود المتغير الداخل}}{\text{قيمة المحور}} * \text{القيمة المناظرة لقيم المحور والموجودة في عمود القيمة المناظرة} \quad \text{(A)}..........$$

وتسهيلا لأستخراج هذه القيم سنطبق أمثلة للمعادلة(A).

عاشراً: يتم تكرار العمليات المذكورة في الفقرات (رابعاً، خامساً، سادساً، سابعاً، ثامناً، تاسـعاً) الى ان نصل الى جدول الحل الامثل والذي يتميز بقيم $(Z_j - C_j \geq 0)$، اذا كانت دالة الهدف من

نوع .Max، وعلى العكس من ذلك، اي تكون قيم صف $(Z_j - C_j \le 0)$ عندما تكون دالة الهدف من نوع .Min. وبذلك تكون قيم العمود الـــ b هي قيم المتغيرات المثلى وبشرط ان تكون قـيم العمود b قيماً موجبة خالية من الاشارات السالبة، ونحصل على قيم Z (دالـــة الهـــدف) اسـفل العمود b وتستخرج بوساطة الصيغة $Z = C_B b$.

2-1 تطبيق طريقة السمبلكس عندما تكون القيود من نوع أقل او يساوي :

لتوضيح ذلك يفضل حل المثال الآتي.

مثال (26) :

اوجد الحل الامثل لنموذج البرمجة الخطية بأستعمال طريقة السمبلكس.

$$\begin{aligned}
Max. \quad & Z = 10X_1 + 12X_2 \\
& S.T. \\
& 2X_1 + 3X_2 \le 15 \\
& 3X_1 + 2X_2 \le 16 \\
& X_1 + X_2 \le 6 \\
& X_1, X_2 \ge 0
\end{aligned}$$

الحل :

اولاً وقبل اجراء اي شئ ، يجب تحويل النموذج آنف الذكر من الصيغة القانونيـــة (conical) الى الصيغة القياسية (standard) وذلك باضافة المتغيرات الوهمية والحصول على قيود مـن نوع متساويات

$$\begin{aligned}
Max. \quad & Z = 10X_1 + 12X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 \\
& S.T. \\
& 2X_1 + 3X_2 + S_1 = 15 \\
& 3X_1 + 2X_2 + S_2 = 16 \\
& X_1 + X_2 + S_3 = 6 \\
& X_1, X_2, S_1, S_2, S_3 \ge 0
\end{aligned}$$

ولأيجاد الجدول الاول لطريقة السمبلكس، كما في الجدول الآتي:

C_B	C_j / Basic	10	12	0	0	0	Solution
		X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B R.H.S
0	S_1	2	3	1	0	0	15
0	S_2	3	2	0	1	0	16
0	S_3	1	1	0	0	1	6
Z_j-C_j		Z_1-C_1 -10	Z_2-C_2 -12	Z_3-C_3 0	Z_4-C_4 0	Z_5-C_5 0	Z=0

ولشرح القيم الموجودة في الجدول اعلاه.

1. ان المتغيرات الاساسية الموجودة في الجدول اعلاه (S_1, S_2, S_3) والتي هي في عمود (Basic) هي في الحقيقة المتغيرات غير الاساسية (المضافة) في نموذج البرمجة الخطية، اي في جدول رقم (I)، اذ تم طرد المتغيرات الاساسية (X_1, X_2) من الجدول اعلاه (وهذه هي احدى الخطوات البدائية لطريقة السمبلكس).

2. يتم استخراج قيم الصف Z_j-C_j وكما يأتي:

$$Z_j - C_j = C_B\, y_j - C_j \quad = \quad \ldots\ldots\ldots (G)$$

$$Z_1 - C_1 = C_B\, y_1 - C_1 = (0\ \ 0\ \ 0)\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} - 10 = -10$$

$$Z_2 - C_2 = C_B\, y_2 - C_2 = (0\ \ 0\ \ 0)\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} - 12 = -12$$

$$Z_3 - C_3 = C_B\, y_3 - C_3 = (0\ \ 0\ \ 0)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - 0 = 0$$

$$Z_4 - C_4 = C_B\, y_4 - C_4 = (0\ \ 0\ \ 0)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - 0 = 0$$

$$Z_5 - C_5 = C_B\, y_5 - C_5 = (0\ \ 0\ \ 0)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 0$$

اما قيمة دالة الهدف Z=0 فتحدد كالآتي:

$$Z = C_B\, b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 16 \\ 6 \end{pmatrix} = 0 \qquad ....(H)$$

3. بعد هذا يتم تحديد المتغير X_2 متغيراً داخلاً لانه يقابل اعلى قيمة سالبة (اقل كمية) في صف Z_j-C_j وهي (12-) ولذلك سيكون العمود اسفل المتغير X_2، هو عمود المتغير الداخل $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ولتحديد المتغير الخارج ويتم ذلك بقسمة عناصر قيم عمود (b) على قيم عمود المتغير الداخل الذي تم تعيينه على الجدول وبالتناظر، وفي هذا المثال يستخرج المتغير (S_1) متغيراً خارجاً لانه يقابل الاقل خارج القسمة ومقدارها (5) وهي الاصغر خارج القسمة بين بقية خوارج القسمة الباقية، وبعد هذا سيتحدد قيمة المحور، على انها تلك القيمة التي تكون في تقاطع قيم العمود المتغير الداخل وقيم صف المتغير الخارج وفي مثالنا هنا تكون القيمة (3) (راجع جدول السمبلكس رقم 1 اذ عينت داخل دائرة) وهنا سنبدأ باستخراج القيم الموجودة الخاصة بالجدول الثاني للسمبلكس. وهنا نبدأ اولاً بأستخراج القيم للصف المناظر الى صف المحور (وتكون قيم الصف المناظر مساوية الى حاصل قسمة قيم صف المحور في الجدول الاول على قيمة المحور) وتكون القيم كما يأتي:

X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R.H.S b
2/3	1	1/3	0	0	5

وتكون بقية جداول السمبلكس حتى جدول الحل الامثل وكما يأتي:

C_B	C_j / Basic	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Solution b R.H.S	
12	X_2	2/3	1	1/3	0	0	5	II
0	S_2	5/3	0	-2/3	1	0	6	
0	S_3	1/3	0	-1/3	0	1	1	
Z_j-C_j		-2	0	4	0	0	Z=60	
12	X_2	0	1	1	0	-2	3	III
0	S_2	0	0	1	1	-5	1	
10	X_1	1	0	-1	0	3	3	
		0	0	2	0	6	Z=66	

اما بقية القيم للجدول الثاني فتستخرج وفقا للمعادلة (A) فمثلاً لو اردنا القيمة في العمود الاول الصف الثاني للجدول الثاني وكيف أستخرجت ووفقاً للمعادلة (A) وكانت قيمتها مساوية (5/3) فيكون كما يلي:

$$3 - \frac{2}{3} * 2 = \frac{5}{3}$$

اما القيمة الآخرى في العمود الاول في الصف الثالث من الجدول الثاني، فنبدأ بالقيمة المناظرة لها في العمود الاول في الصف الثالث من الجدول الاول وبتطبيق المعادلة (A) فنحصل على قيمتها المساوية $(\frac{1}{3})$ وتكون كما يأتي:

$$1 - \frac{1}{3} * 2 = \frac{1}{3}$$

أما من حيث قيم العمود المناظر الى عمود المحور فهنا تكون فقط القيمة المناظرة الى قيمة المحور دائماً عبارة عن واحد، اما بقية القيم الموجودة في العمود المناظر الى عمود المحور عبارة عن اصفار سواء أكانت اعلى المحور أم اسفل المحور.

ولتكملة بقية قيم الجدول سننتقل الى قيم العمود الثالث ولتحقيق هذا الغرض سنبدأ بقيم العمود الثالث للجدول الاول (الجدول السابق) وبحسب المعادلة A وهنا نبدأ بتحديد القيمة الموجودة في العمود الثالث الصف الثاني في الجدول الثاني، ونبدأ من القيمة المناظرة لهما في الجدول الاول.

$$\text{القيمة الجديدة في الجدول اللاحق (الجدول الثاني)} = 0 - \frac{2}{3} * 1 = -\frac{2}{3}$$

ولتحديد القيمة الموجودة في العمود الثالث الصف الثالث من الجدول الثاني نبدأ من القيمة المناظرة لها في الجدول الاول اي من القيمة الموجودة في الصف الثالث العمود الثالث في الجدول الاول وكما يأتي:

$$\text{القيمة الجديدة في الجدول اللاحق (الجدول الثاني)} = 0 - \frac{1}{3} * 1 = -\frac{1}{3}$$

ويُترك استخراج بقية القيم للطالب تمريناً للتعلم.

اما قيم الصف Z_j-C_j فتكون بحسب المعادلة (G) وكما يأتي:

$$Z_1 - C_1 = C_B\, y_1 - C_1 = (12\ \ 0\ \ 0)\begin{pmatrix} 2/3 \\ 5/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} - 10 = -2$$

$$Z_2 - C_2 = C_B\, y_2 - C_2 = (12\ \ 0\ \ 0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 12 = 0$$

$$Z_3 - C_3 = C_B\, y_3 - C_3 = (12\ \ 0\ \ 0)\begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} - 0 = 4$$

$$Z_4 - C_4 = C_B\, y_4 - C_4 = (12\ \ 0\ \ 0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = 0$$

$$Z_5 - C_5 = C_B\, y_5 - C_5 = (12\ \ 0\ \ 0)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = 0$$

اما قيمة Z في الجدول الثاني فتحدد حسب المعادلة (H) وكما يأتي:

$$Z = C_B\, b = (12\ \ 0\ \ 0)\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = 60$$

وبظهور قيم سالبة في صف Z_j-C_j في الجدول الثاني (Z_1-C_1 = -2) فإن هذا يعني أننا لم نحصل على الحل الامثل بعد، وعلينا تحديد المتغير الداخل والمتغير الخارج بحسب ما تم عمله في الجدول (I) والجدول (II) من جداول السمبلكس.

وهنا يجب تحديد المتغير الداخل وهو المقابل الى اقل قيمة (اكبر قيمة مصحوبة بأشارة سالبة) لصف Z_j-C_j وهنا يكون المتغير الاول X_1 هو المتغير الداخل، اما تحديد المتغير الخارج فيكون حسب قاعدة أقل النسب، وذلك بقسمة قيم عمود (b) للجدول الثاني على قيم العمود المتغير الداخل (قيم عمود المتغير X_1). ويكون المتغير الخارج هنا هو المتغير الوهمي S_3،

وتكون قيمة المحور هو تقاطع قيم عمود المتغير الداخل مع صف المتغير الخارج وهنا سيكون $\frac{1}{3}$ وقد عُلم بوضعه داخل دائرة.

وهنا سنبدأ باستخراج القيم للجدول الثالث، ونبدأ بالقيم المناظرة لصف المحور ويكون ذلك بقسمة كل القيم على قيمة المحور وتكون كالآتي:

X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	b
1	0	-1	0	3	3

وستذكر هذه القيم للصف الثالث في الجدول الثالث للسمبلكس، اما بقية القيم فستخرج كما في المعادلة (A).

اما كيفية أستخراج بقية القيم للجدول الثالث، عدا قيم الصف الثالث (الصف المناظر الى صف المحور)، ولأستخراج القيمة الموجودة في الصف الثاني في العمود الثاني من الجدول الثالث، تبدأ العملية من القيمة المناظرة لها، اي من القيمة الموجودة في الصف الثاني في العمود الثاني من الجدول الثاني وبتطبيق المعادلة (A) وكما يأتي:

$$0 - \frac{5/3}{1/3} * 0 = 0 = \text{القيمة الجديدة في الجدول اللاحق (الجدول الثالث)}$$

اما القيمة الموجودة في الصف الاول في العمود الثاني، فنبدأ ايضاً من القيمة المناظرة لها في الجدول الثاني ويكون:

$$1 - \frac{2/3}{1/3} * 0 = 1 = \text{القيمة الجديدة في الجدول اللاحق الثالث}$$

اما القيمة الموجودة في الصف الاول من العمود الثالث في الجدو الثالث نبدأ من القيمة المناظرة لها في الجدول الثاني :

$$\frac{1}{3} - \frac{2/3}{1/3} * (-\frac{1}{3}) = 1 = \text{القيمة الجديدة في الجدول اللاحق الثالث}$$

اما القيمة الموجودة في الصف الثاني العمود الثالث في الجدول الثالث نبدأ من القيمة المناظرة لها في الجدول الثاني:

$$-\frac{2}{3} - \frac{5/3}{1/3} * -\frac{1}{3} = 1 = \text{القيمة الجديدة في الجدول اللاحق الثالث}$$

اما أستخراج بقية القيم للجدول الثالث فنترك للطالب تمرينا وهنا سننتقل الى استخراج قيم العمود (b) فالقيمة الاولى من العمود (b) في الجدول الثالث، ايضاً سنبدأ من القيمة الاولى للعمود (b) في الجدول الثاني وحسب المعادلة (A) .

$$5 - \frac{2/3}{1/3} * 1 = 3$$ = القيمة الجديدة في الجدول اللاحق الثالث

اما القيمة الثانية في العمود (b) في الجدول الثالث فيكون أستخراجها كالآتي:

$$6 - \frac{5/3}{1/3} * 1 = 1$$ = القيمة الجديدة في الجدول اللاحق الثالث

اما فيما يتعلق بقيم الصف $(Z_j\text{-}C_j)$ في الجدول الثالث فيكون أستخراجها كما يأتي:

$$Z_1 - C_1 = C_B\, y_1 - C_1 = (12 \ \ 0 \ \ 10)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - 10 = 0$$

$$Z_2 - C_2 = C_B\, y_2 - C_2 = (12 \ \ 0 \ \ 10)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - 12 = 0$$

$$Z_3 - C_3 = C_B\, y_3 - C_3 = (12 \ \ 0 \ \ 10)\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} - 0 = 2$$

$$Z_4 - C_4 = C_B\, y_4 - C_3 = (12 \ \ 0 \ 10)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - 0 = 0$$

$$Z_5 - C_5 = C_B\, y_5 - C_5 = (12 \ \ 0 \ \ 10)\begin{pmatrix}-2\\-5\\3\end{pmatrix} - 0 = 6$$

$$Z = C_B\, b = (12 \ \ 0 \ \ 10)\begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix} = 66$$

ومما تجدر الاشارة اليه والذي يجب ان يلم الطالب بمعرفته هو ان في كل جدول من جداول السمبلكس تكون قيم (Zj-Cj) للمتغيرات الاساسية لذلك الجدول عبارة عن اصفار (Zj-Cj=0)، وبما ان جميع قيم (Zj-Cj) للجدول الثالث عبارة عن قيم اكبر او مساوي للصفر، فمعنى هذا ان الجدول الثالث هو جدول الحل الامثل، وتكون قيم المتغيرات المثلى هي :

$X_2 = 3 \quad , S_2 = 1 \quad , X_1 = 3$

وبظهور قيمة موجبة للمتغير الثاني الوهمي $S_2=1$ هذه دلالة قاطعة بان المصدر الثاني والذي قيمته (16) لم يستغل تماماً، ولذلك ظهر مقدار عدم الاستغلال وكان بمقدار $S_2 = 1$.

مثال (27) :

أوجد الحل الامثل لنموذج البرمجة الخطية التالي مستخدماً طريقة السمبلكس

$$Max. \quad Z = 2X_1 + 3X_2$$

$$S.T.$$

$$0.25X_1 + 0.5X_2 \leq 40$$

$$0.4X_1 + 0.2X_2 \leq 40$$

$$0.8X_2 \leq 40$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

ابتداءاً يجب تحويل النموذج الى الصيغة القياسية

$$Max. \quad Z = 2X_1 + 3X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

$$S.T.$$

$$0.25X_1 + 0.5X_2 + S_1 = 40$$

$$0.4X_1 + 0.2X_2 + S_2 = 40$$

$$0.8X_2 + S_3 = 40$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

بعد هذا يوضع نموذج البرمجة الخطية بصيغته القياسية في الجدول الاول للسمبلكس

C_B	C_j \ Basic	2	3	0	0	0	Solution b R.H.S
		X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	
0	S_1	0.25	0.5	1	0	0	40
0	S_2	0.4	0.2	0	1	0	40
0	S_3	0	0.8	0	0	1	40
Z_j-C_j		Z_1-C_1 -2	Z_2-C_2 -3	Z_3-C_3 0	Z_4-C_4 0	Z_5-C_5 0	Z=0

يجب ملاحظة ان طريقة السمبلكس تشترط وخاصة في الجدول الاول منها ان تكون المتغيرات غير الاساسية في النموذج، متغيرات أساسية وبقيم (كما في الجدول اعلاه) , $S_1=40$ $S_2=40$, $S_3=40$ وتطرد المتغيرات الاساسية في النموذج وبقيم $X_1 = X_2 = 0$.

وسيتم توضيح استخراج لقيمة واحدة من قيم Z_j-C_j وتوضيح استخراج قيمة Z وكما يأتي:

$$Z_1 - C_1 = C_B\, y_1 - C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.4 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 = -2$$

وبقية القيم تستخرج من قبل الطالب، حتى يتقن استخراجها.

$$Z = C_B\, b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 \\ 40 \\ 40 \end{pmatrix} = 0$$

ولتكملة الحل وصولاً الى الحل الامثل، سيتم أختيار المتغير X_2 متغيرا داخلا لتمتعه بأكبر قيمة سالبة (او اقل قيمة) في صف Z_2-C_2=-3 وفي حالة المتغير الخارج سوف يكون المتغير S_3 وذلك لمقابلته لأقل حاصل قسمة لعناصر عمود b على قيم عمود المتغير الداخل X_2 يكون المحور هو القيمة الموجودة في العمود الثاني في الصف الثالث وهي (0.8) وبذلك يمكننا الانتقال الى الجدول الثاني للسمبلكس وسيتم بيان ذلك وذكر جداول السمبلكس كافة وصولا الى جدول الحل الامثل اي عند وصولنا الى قيم $(Z_j - C_j \geq 0)$.

C_B	Basic \ C_j	X_1 (2)	X_2 (3)	S_1 (0)	S_2 (0)	S_3 (0)	Solution b R.H.S	
0	S_1	0.25	0.5	1	0	0	40	الجدول الاول I
0	S_2	0.4	0.2	0	1	0	40	
0	S_3	0	0.8	0	0	1	40	
Z_j-C_j		-2	-3	0	0	0	Z=0	
0	S_1	0.25	0	1	0	-6.25	15	الجدول الثاني II
0	S_2	0.4	0	0	1	-0.25	30	
3	X_2	0	1	0	0	1.5	50	
Z_j-C_j		-2	0	0	0	-3.75	Z=150	
2	X_1	1	0	4	0	-2.5	60	الجدول الثالث III
0	S_2	0	0	-1.6	1	0.75	6	
3	X_2	0	1	0	0	1.25	50	
Z_j-C_j		0	0	8	0	-1.25	Z=270	
2	X_1	1	0	-1.33	3.33	0	80	الجدول الرابع IV
0	S_3	0	0	-2.13	1.33	1	8	
3	X_2	0	1	2.67	-1.67	0	40	
Z_j-C_j		0	0	5.33	1.67	0	Z=280	

3.6 sensitivity Analysis

In LP, the parameters (input data) of the model can change within certain limits without causing changes in the optimum. This is referred to as *sensitivity analysis* and will be the subject matter of this section. Later, Chapter 4 will study *post-optimal* analysis,

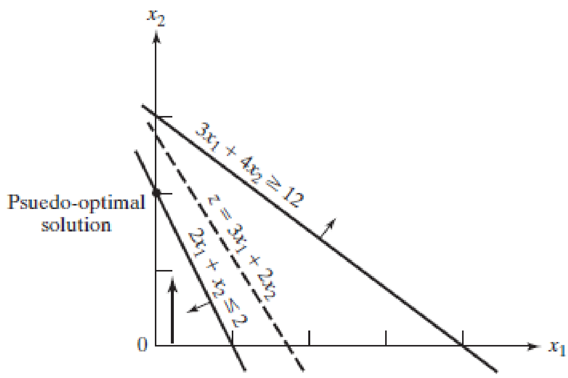


FIGURE 3.8
Infeasible solution of Example 3.5-4

which deals with determining the new optimum solution when targeted input data are changed.

The presentation explains the basic ideas of sensitivity analysis using the more concrete graphical solution. These ideas are then extended to the general LP problem using the simplex tableau results.

3.6.1 Graphical Sensitivity Analysis

This section demonstrates the general idea of sensitivity analysis. Two cases will be considered:

1. Sensitivity of the optimum solution to changes in the availability of the resources (right-hand side of the constraints).
2. Sensitivity of the optimum solution to changes in unit profit or unit cost (coefficients of the objective function).

We will use individual examples to explain the two cases.

Example 3.6-1 (Changes in the Right-Hand Side)

JOBCO manufactures two products on two machines. A unit of product 1 requires 2 hrs on machine 1 and 1 hr on machine 2. For product 2, one unit requires 1 hr on machine 1 and 3 hrs on machine 2. The revenues per unit of products 1 and 2 are \$30 and \$20, respectively. The total daily processing time available for each machine is 8 hrs.

Letting x_1 and x_2 represent the daily number of units of products 1 and 2, respectively, the LP model is given as

$$\text{Maximize } z = 30x_1 + 20x_2$$

subject to

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\le 8 \qquad \text{(Machine 1)} \\ x_1 + 3x_2 &\le 8 \qquad \text{(Machine 2)} \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Figure 3.9 illustrates the change in the optimum solution when changes are made in the capacity of machine 1. If the daily capacity is increased from 8 to 9 hrs, the new optimum will move to point G. The rate of change in optimum z resulting from changing machine 1 capacity from 8 to 9 hrs can be computed as:

$$\begin{pmatrix} \text{Rate of revenue change} \\ \text{resulting from increasing} \\ \text{machine 1 capacity by 1 hr} \\ \text{(point } C \text{ to point } G) \end{pmatrix} = \frac{z_G - z_C}{\text{(Capacity change)}} = \frac{142 - 128}{9 - 8} = \$14/\text{hr}$$

The computed rate provides a *direct* link between the model input (resources) and its output (total revenue). It says that a unit increase (decrease) in machine 1 capacity will increase (decrease) revenue by \$14.

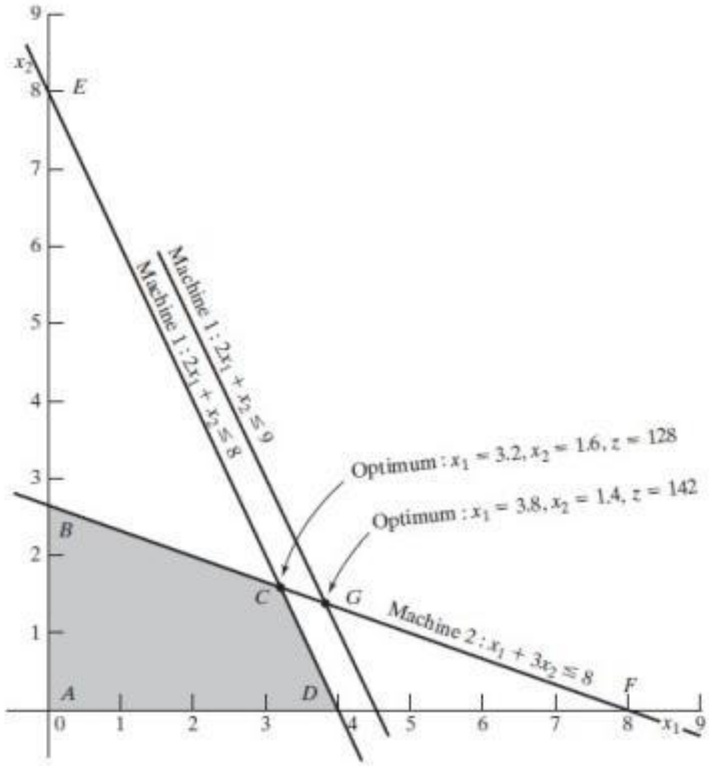


FIGURE 3.9

Graphical sensitivity of optimal solution to changes in the availability of resources (right-hand side of the constraints)

The name **unit worth of a resource** is an apt description of the rate of change of the objective function per unit change of a resource. Nevertheless, early LP developments have coined the abstract name **dual (or shadow) price** and this name is now standard in all the LP literature and software packages. The presentation in this book conforms to this standard. Nevertheless, think "unit worth of resource" whenever you come across standard names "dual or shadow price."

Looking at Figure 3.9, we can see that the dual price of \$14/hr remains valid for changes (increases or decreases) in machine 1 capacity that move its constraint parallel to itself to any point on the line segment BF. We compute machine 1 capacities at points B and F as follows:

$$\text{Minimum machine 1 capacity [at } B = (0, 2.67)] = 2 \times 0 + 1 \times 2.67 = 2.67 \text{ hr}$$

$$\text{Minimum machine 1 capacity [at } F = (8, 0)] = 2 \times 8 + 1 \times 0 = 16 \text{ hr}$$

The conclusion is that the dual price of \$14.00/hr remains valid only in the range

$$2.67 \text{ hr} \le \text{Machine 1 capacity} \le 16 \text{ hr}$$

Changes outside this range produce a different dual price (worth per unit).

Using similar computations, you can verify that the dual price for machine 2 capacity is \$2/hr, and it remains valid for changes in machine 2 capacity within the line segment DE. Now,

$$\text{Minimum machine 2 capacity [at } D = (4, 0)] = 1 \times 4 + 3 \times 0 = 4 \text{ hr}$$

$$\text{Minimum machine 2 capacity [at } E = (0, 8)] = 1 \times 0 + 3 \times 8 = 24 \text{ hr}$$

Thus, the dual price of \$2/hr for machine 2 remains applicable for the range

$$4 \text{ hr} \leq \text{Machine 2 capacity} \leq 24 \text{ hr}$$

The computed limits for machine 1 and 2 are referred to as the **feasibility ranges**. All software packages provide information about the dual prices and their feasibility ranges. Section 3.6.4 shows how AMPL, Solver, and TORA generate this information.

The dual prices allow making economic decisions about the LP problem, as the following questions demonstrate:

Question 1. If JOBCO can increase the capacity of both machines, which machine should receive priority?

From the dual prices for machines 1 and 2, each additional hour of machine 1 increases revenue by \$14, as opposed to only \$2 for machine 2. Thus, priority should be given to machine 1.

Question 2. A suggestion is made to increase the capacities of machines 1 and 2 at the additional cost of \$10/hr for each machine. Is this advisable?

For machine 1, the additional net revenue per hour is $14 - 10 = \$4$, and for machine 2, the net is $\$2 - \$10 = -\$8$. Hence, only machine 1 should be considered for capacity increase.

Question 3. If the capacity of machine 1 is increased from 8 to 13 hrs, how will this increase impact the optimum revenue?

The dual price for machine 1 is \$14 and is applicable in the range (2.67, 16) hr. The proposed increase to 13 hrs falls within the feasibility range. Hence, the increase in revenue is $\$14(13 - 8) = \$70$, which means that the total revenue will be increased from \$128 to $\$198(= \$128 + \$70)$.

Question 4. Suppose that the capacity of machine 1 is increased to 20 hrs, how will this increase affect the optimum revenue?

The proposed change is outside the feasibility range (2.67, 16) hr. Thus, we can only make an immediate conclusion regarding an increase up to 16 hrs. Beyond that, further calculations are needed to find the answer (see Chapter 4). Remember that falling outside the feasibility range does *not* mean that the problem has no solution. It only means that available information is not sufficient to make a complete decision.

Question 5. How can we determine the new optimum values of the variables associated with a change in a resource?

The optimum values of the variables will change. However, the procedure for determining these values requires additional computations, as will be shown in Section 3.6.2.

Example 3.6-2 (Changes in the Objective Coefficients)

Figure 3.10 shows the graphical solution space of the JOBCO problem presented in Example 3.6-1. The optimum occurs at point $C(x_1 = 3.2, x_2 = 1.6, z = 128)$. Changes in revenue units (i.e., objective-function coefficients) will change the slope of z. However, as can be seen from

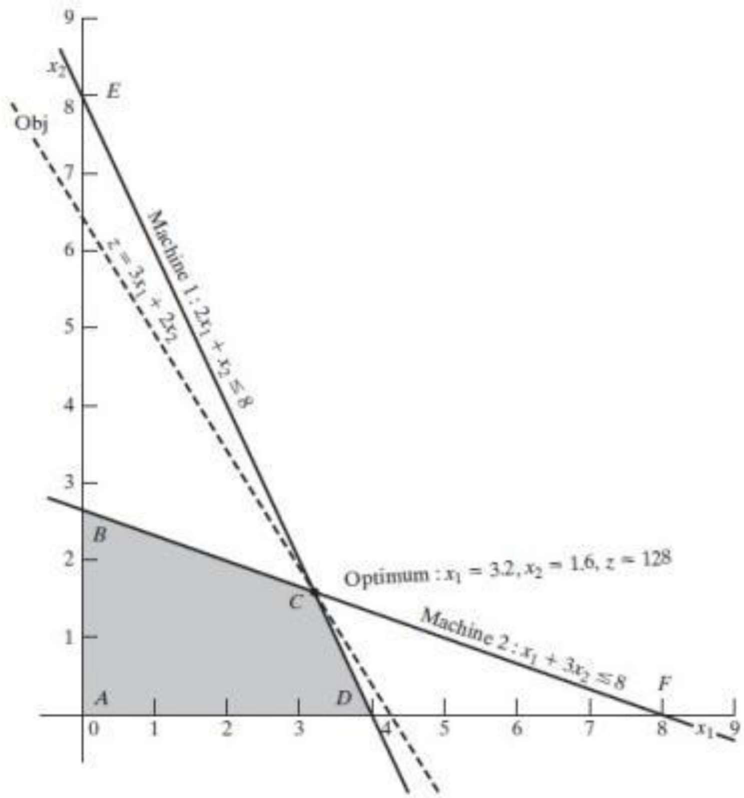


FIGURE 3.10

Graphical sensitivity of optimal solution to changes in the revenue units (coefficients of the objective function)

the figure, the optimum solution at point C remains unchanged so long as the objective function lies between lines BF and DE.

How can we determine ranges for the coefficients of the objective function that will keep the optimum solution unchanged at C? First, we write the objective function in the general format:

$$\text{Maximinze } z = c_1x_1 + c_2x_2$$

Imagine now that line z is pivoted at C and that it can rotate clockwise and counterclockwise. The optimum solution will remain at point C so long as $z = c_1x_1 + c_2 + x_2$ lies between the two lines $x_1 + 3x_2 = 8$ and $2x_1 + x_2 = 8$. This means that the ratio $\frac{c_1}{c_2}$ can vary between $\frac{1}{3}$ and $\frac{2}{1}$, which yields the following **optimality range**:[10]

$$\frac{1}{3} \le \frac{c_1}{c_2} \le \frac{2}{1} \text{ or } .333 \le \frac{c_1}{c_2} \le 2$$

This information can provide immediate answers regarding the optimum solution as the following questions demonstrate:

Question 1. Suppose that the unit revenues for products 1 and 2 are changed to \$35 and \$25, respectively. Will the current optimum remain the same?

The new objective function is

$$\text{Maximinze } z = 35x_1 + 25x_2$$

The solution at C will remain optimal because $\frac{c_1}{c_2} = \frac{35}{25} = 1.4$ remains within the optimality range (.333, 2). When the ratio falls outside this range, additional calculations are needed to find the new optimum (see Chapter 4). Notice that although the values of the variables at the optimum point C remain unchanged, the optimum value of z changes to $35 \times (3.2) + 25 \times (1.6) = \$152$.

Question 2. Suppose that the unit revenue of product 2 is fixed at its current value $c_2 = \$20$. What is the associated optimality range for the unit revenue for product 1, c_1, that will keep the optimum unchanged?

Substituting $c_2 = 20$ in the condition $\frac{1}{3} \le \frac{c_1}{c_2} \le 2$, we get

$$\tfrac{1}{3} \times 20 \le c_1 \le 2 \times 20 \text{ or } 6.67 \le c_1 \le 40$$

We can similarly determine the optimality range for c_2 by fixing the value of c_1 at \$30.00. Thus,

$$(c_2 \le 30 \times 3 \text{ and } c_2 \ge \tfrac{30}{2}) \text{ or } 15 \le c_2 \le 90$$

As in the case of the right-hand side, all software packages provide the optimality ranges for each objective function coefficient. Section 3.6.4 shows how AMPL, Solver, and TORA generate these results.

Remarks. Although the material in this section has dealt only with two variables, the results lay the foundation for the development of sensitivity analysis for the general LP problem in Sections 3.6.2 and 3.6.3.

3.6.2 Algebraic Sensitivity Analysis—Changes in the Right-Hand Side

In Section 3.6.1, we used the graphical solution to determine the *dual price* (unit worth of a resource) and its feasibility ranges. This section extends the analysis to the general LP model. A numeric example (the TOYCO model) will be used to facilitate the presentation.

Example 3.6-3 (TOYCO Model)

TOYCO uses three operations to assemble three types of toys—trains, trucks, and cars. The daily available times for the three operations are 430, 460, and 420 mins, respectively, and the revenues per unit of toy train, truck, and car are \$3, \$2, and \$5, respectively. The assembly times per train at the three operations are 1, 3, and 1 mins, respectively. The corresponding times per train and per car are (2, 0, 4) and (1, 2, 0) mins (a zero time indicates that the operation is not used).

Letting x_1, x_2, and x_3 represent the daily number of units assembled of trains, trucks, and cars, respectively, the associated LP model is given as:

$$\text{Maximinze } z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

subject to

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + \ x_3 &\le 430 \text{ (Operation 1)} \\ 3x_1 \qquad + 2x_3 &\le 460 \text{ (Operation 2)} \\ x_1 + 4x_2 \qquad &\le 420 \text{ (Operation 3)} \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

Using x_4, x_5, and x_6 as the slack variables for the constraints of operations 1, 2, and 3, respectively, the optimum tableau is

Basic	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solution
z	4	0	0	1	2	0	1350
x_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	100
x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230
x_6	2	0	0	-2	1	1	20

The solution recommends manufacturing 100 trucks and 230 cars but no trains. The associated revenue is \$1350.

Determination of dual prices and feasibility ranges. We will use the TOYCO model to show how this information is obtained from the optimal simplex tableau. Recognizing that the dual prices and their feasibility ranges are rooted in making changes in the right-hand side of the constraints, suppose that D_1, D_2, and D_3 are the (positive or negative) changes made in the allotted daily manufacturing time of operations 1, 2, and 3, respectively. The original TOYCO model can then be changed to

$$\text{Maximinze } z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

subject to

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + \ x_3 &\le 430 + D_1 \quad \text{(Operation 1)} \\ 3x_1 \qquad + 2x_3 &\le 460 + D_2 \quad \text{(Operation 2)} \\ x_1 + 4x_2 \qquad &\le 420 + D_3 \quad \text{(Operation 3)} \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

To express the optimum simplex tableau of the modified problem in terms of the changes D_1, D_2, and D_3, we first rewrite the starting tableau using the new right-hand sides, $430 + D_1$, $460 + D_2$, and $420 + D_3$.

							Solution			
Basic	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	*RHS*	D_1	D_2	D_3
z	-3	-2	-5	0	0	0	0	0	0	0
x_4	1	2	1	1	0	0	430	1	0	0
x_5	3	0	2	0	1	0	460	0	1	0
x_6	1	4	0	0	0	1	420	0	0	1

The two shaded areas are identical. Hence, if we repeat the *same* simplex iterations (with the *same* row operations) as in the *original* model, the columns in the two highlighted area will also be identical in the optimal tableau—that is,

							Solution			
Basic	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	*RHS*	D_1	D_2	D_3
z	4	0	0	1	2	0	1350	1	2	0
x_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	100	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0
x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230	0	$\frac{1}{2}$	0
x_6	2	0	0	-2	1	1	20	-2	1	1

The new optimum tableau provides the following optimal solution:

$$z = 1350 + D_1 + 2D_2$$
$$x_2 = 100 + \tfrac{1}{2}D_1 - \tfrac{1}{4}D_2$$
$$x_3 = 230 + \tfrac{1}{2}D_2$$
$$x_6 = 20 - 2D_1 + D_2 + D_3$$

We now use this solution to determine the dual prices and the feasibility ranges.

Dual prices: The value of the objective function can be written as

$$z = 1350 + \mathbf{1}D_1 + \mathbf{2}D_2 + \mathbf{0}D_3$$

The equation shows that

1. A unit change in operation 1 capacity ($D_1 = \pm 1$ min) changes z by \$1.
2. A unit change in operation 2 capacity ($D_2 = \pm 1$ min) changes z by \$2.
3. A unit change in operation 3 capacity ($D_3 = \pm 1$ min) changes z by \$0.

This means that, by definition, the corresponding dual prices are 1, 2, and 0 (\$/min) for operations 1, 2, and 3, respectively.

The coefficients of D_1, D_2, and D_3 in the optimal z-row are exactly those of the slack variables x_4, x_5, and x_6. This means that the dual prices equal the coefficients of the slack variables in the optimal z-row. There is no ambiguity as to which coefficient applies to which resource because each slack variable is uniquely identified with a constraint.

Feasibility range: The current solution remains feasible if all the basic variables remain nonnegative—that is,

$$x_2 = 100 + \tfrac{1}{2}D_1 - \tfrac{1}{4}D_2 \geq 0$$
$$x_3 = 230 + \tfrac{1}{2}D_2 \geq 0$$
$$x_6 = 20 - 2D_1 + D_2 + D_3 \geq 0$$

Simultaneous changes D_1, D_2, and D_3 that satisfy these inequalities will keep the solution feasible. The new optimum solution can be found by substituting out the values of D_1, D_2, and D_3.

To illustrate the use of these conditions, suppose that the manufacturing time available for operations 1, 2, and 3 are 480, 440, and 400 mins, respectively. Then, $D_1 = 480 - 430 = 50$, $D_2 = 440 - 460 = -20$, and $D_3 = 400 - 420 = -20$. Substituting in the feasibility conditions, we get

$$x_2 = 100 + \tfrac{1}{2}(50) - \tfrac{1}{4}(-20) = 130 > 0 \quad \text{(feasible)}$$
$$x_3 = 230 + \tfrac{1}{2}(-20) = 220 > 0 \quad \text{(feasible)}$$
$$x_6 = 20 - 2(50) + (-20) + (-10) = -110 < 0 \quad \text{(infeasible)}$$

The calculations show that $x_6 < 0$, hence the current solution does not remain feasible. Additional calculations will be needed to find the new solution (see Chapter 4).

Alternatively, if the changes in the resources are such that $D_1 = -30$, $D_2 = -12$, and $D_3 = 10$, then

$$x_2 = 100 + \tfrac{1}{2}(-30) - \tfrac{1}{4}(-12) = 88 > 0 \quad \text{(feasible)}$$
$$x_3 = 230 + \tfrac{1}{2}(-12) = 224 > 0 \quad \text{(feasible)}$$
$$x_6 = 20 - 2(-30) + (-12) + (10) = 78 > 0 \quad \text{(feasible)}$$

The new (optimal) feasible solution is $x_1 = 88$, $x_3 = 224$, and $x_6 = 68$ with $z = 3(0) + 2(88) + 5(224) = \$1296$. Notice that the optimum objective value can also be computed using the dual prices as $z = 1350 + 1(-30) + 2(-12) + 0(10) = \$1296$.

The given conditions can produce the individual *feasibility ranges* associated with changing the resources *one at a time* (as defined in Section 3.6.1). For example, a change in operation 1 time only means that $D_2 = D_3 = 0$. The simultaneous conditions thus reduce to

$$\left.\begin{array}{l} x_2 = 100 + \frac{1}{2}D_1 \geq 0 \Rightarrow D_1 \geq -200 \\ x_3 = 230 > 0 \\ x_6 = 20 - 2D_1 \geq 0 \Rightarrow D_1 \leq 10 \end{array}\right\} \Rightarrow -200 \leq D_1 \leq 10$$

This means that the dual price for operation 1 is valid in the feasibility range $-200 \leq D_1 \leq 10$.

We can show in a similar manner that the feasibility ranges for operations 2 and 3 are $-20 \leq D_2 \leq 400$ and $-20 \leq D_3 \leq \infty$, respectively (verify!).

We can now summarize the dual prices and their feasibility ranges for the TOYCO model as follows:[11]

			Resource amount (minutes)		
Resource	Dual price($)	Feasibility range	*Minimum*	*Current*	*Maximum*
Operation 1	1	$-200 \le D_1 \le 10$	230	430	440
Operation 2	2	$-20 \le D_2 \le 400$	440	440	860
Operation 3	0	$-20 \le D_3 < \infty$	400	420	∞

It is important to notice that the dual prices will remain applicable for any *simultaneous* changes that keep the solution feasible, even if the changes violate the individual ranges. For example, the changes $D_1 = 30$, $D_2 = -12$, and $D_3 = 100$ will keep the solution feasible even though $D_1 = 30$ violates the feasibility range $-200 \le D_1 \le 10$, as the following computations show:

$$x_2 = 100 + \tfrac{1}{2}(30) - \tfrac{1}{4}(-12) = 118 > 0 \qquad \text{(feasible)}$$

$$x_3 = 230 + \tfrac{1}{2}(-12) = 224 > 0 \qquad \text{(feasible)}$$

$$x_6 = 20 - 2(30) + (-12) + (100) = 48 > 0 \quad \text{(feasible)}$$

This means that the dual prices will remain applicable, and we can compute the new optimum objective value from the dual prices as $z = 1350 + 1(30) + 2(-12) + 0(100) = \$1356$.

4.1 DEFINITION OF THE DUAL PROBLEM

The **dual** problem is defined systematically from the **primal** (or original) LP model. The two problems are closely related, *in the sense that the optimal solution of one problem automatically provides the optimal solution to the other*. As such, it may be advantageous computationally in some cases to determine the primal solution by solving the dual. But that computational advantage may be minor when compared with what the rich primal–dual theory offers, as we will demonstrate throughout the book.

In all textbooks this author is familiar with, the dual is defined for various forms of the primal depending on the sense of optimization (maximization or minimization), types of constraints ($\leq, \geq$, or $=$), and sign of the variables (nonnegative or unrestricted). Not only are there too many combinations to memorize, but their use may require a degree of reconciling with the simplex algorithm results, primarily because the primal from which the dual is constructed is not in the standard format used by the simplex algorithm (e.g., the primal from which the dual is constructed may have negative right-hand sides in the constraints).

This book offers a *single* definition that automatically subsumes *all* forms of the primal. Our definition of the dual problem requires expressing the primal problem in the *equation form* presented in Section 3.1, a format consistent with the simplex starting tableau (all the constraints are equations with nonnegative right-hand sides, and all the variables are nonnegative). Hence, any results obtained from the primal optimal solution apply unambiguously to the associated dual problem.

The following is a summary of how the dual is constructed from the (equation-form) primal:

1. A dual variable is assigned to each primal (equation) constraint and a dual constraint is assigned to each primal variable.
2. The right-hand sides of the primal constraints provide the coefficients of the dual objective function.

TABLE 4.1 Rules for Constructing the Dual Problem

Primal problem objective[a]	Dual problem		
	Objective	*Constraints type*[b]	*Variables sign*
Maximization	Minimization	$\geq$	Unrestricted
Minimization	Maximization	$\leq$	Unrestricted

[a]All primal constraints are equations with nonnegative right-hand sides, and all the variables are nonnegative.
[b]A convenient way to remember the constraint type ($\geq$ or $\leq$) in the dual is that if the dual objective is a "pointing-*down*" minimization, then *all* the constraints are "pointing-*up*" ($\geq$)-inequalities. The opposite applies when the dual objective is maximization.

3. The dual constraint corresponding to a primal variable is constructed by transposing the primal variable *column* into a *row* with (i) the primal objective coefficient becoming the dual right-hand side and (ii) the remaining constraint coefficients comprising the dual left-hand side coefficients.
4. The sense of optimization, direction of inequalities, and the signs of the variables in the dual are governed by the rules in Table 4.1

The following examples demonstrate the use of the rules in Table 4.1. The examples also show that our definition incorporates all forms of the primal automatically.

Example 4.1-1

Primal	Primal in equation form	Dual variables
Maximize $z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$	Maximize $z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 + 0x_4$	
subject to	subject to	
$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10$	$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10$	y_1
$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8$	$2x_1 - x_2 + 3x_3 + 0x_4 = 8$	y_2
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$	$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$	

Dual Problem

$$\text{Minimize } w = 10y_1 + 8y_2$$

subject to

$$\begin{aligned} y_1 + 2y_2 &\geq 5 \\ 2y_1 - y_2 &\geq 12 \\ y_1 + 3y_2 &\geq 4 \\ \left.\begin{aligned} y_1 + 0y_2 &\geq 0 \\ y_1, y_2 \text{ unrestricted} \end{aligned}\right\} &\Rightarrow (y_1 \geq 0, y_2 \text{ unrestricted}) \end{aligned}$$

Example 4.1-2

Primal	Primal in equation form	Dual variables
Minimize $z = 15x_1 + 12x_2$	Minimize $z = 15x_1 + 12x_2 + 0x_3 + 0x_4$	
subject to	subject to	
$x_1 + 2x_2 \geq 3$	$x_1 + 2x_2 - x_3 + 0x_4 = 3$	y_1
$2x_1 - 4x_2 \leq 5$	$2x_1 - 4x_2 + 0x_3 + x_4 = 5$	y_2
$x_1, x_2 \geq 0$	$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$	

Dual Problem

$$\text{Maximize } w = 3y_1 + 5y_2$$

subject to

$$\begin{aligned} y_1 + 2y_2 &\leq 15 \\ 2y_1 - 4y_2 &\leq 12 \\ \left.\begin{array}{r} -y_1 \qquad \leq 0 \\ y_2 \leq 0 \\ y_1, y_2 \text{ unrestrricted} \end{array}\right\} &\Rightarrow (y_1 \geq 0, y_2 \leq 0) \end{aligned}$$

Example 4.1-3

Primal	Primal in equation form	Dual variables
	Substitute $x_1 = x_1^- - x_1^+$.	
Maximize $z = 5x_1 + 6x_2$	Maximize $z = 5x_1^- - 5x_1^+ + 6x_2$	
subject to	subject to	
$x_1 + 2x_2 = 5$	$x_1^- - x_1^+ + 2x_2 = 5$	y_1
$-x_1 + 5x_2 \geq 3$	$-x_1^- + x_1^+ + 5x_2 - x_3 = 3$	y_2
$4x_1 + 7x_2 \leq 8$	$4x_1^- - 4x_1^+ + 7x_2 + x_4 = 8$	y_3
x_1 unrestricted, $x_2 \geq 0$	$x_1^-, x_1^+, x_2, x_3, x_4 \geq 0$	

Dual Problem

$$\text{Minimize } z = 5y_1 + 3y_2 + 8y_3$$

subject to

$$\begin{aligned} &\left.\begin{array}{r} y_1 - y_2 + 4y_3 \geq 5 \\ -y_1 + y_2 - 4y_3 \geq -5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y_1 - y_2 + 4y_3 \geq 5 \\ y_1 - y_2 + 4y_3 \leq 5 \end{array}\right\} \Rightarrow y_1 - y_2 + 4y_3 = 5 \\ &2y_1 + 5y_2 + 7y_3 \geq 6 \\ &\left.\begin{array}{r} -y_2 \qquad \geq 0 \\ y_3 \geq 0 \\ y_1, y_2, y_3 \text{ unrestricted} \end{array}\right\} \Rightarrow (y_1 \text{ unrestricted}, y_2 \leq 0, y_3 \geq 0) \end{aligned}$$

The first and second constraints are replaced by an equation. The general rule is that an unrestricted primal variable always corresponds to an equality dual constraint. Conversely, a primal equation produces an unrestricted dual variable, as the first primal constraint demonstrates.

TABLE 4.2 Rules for Constructing the Dual Problem

Maximization problem		Minimization problem
Constraints		***Variables***
$\geq$	$\Leftrightarrow$	≤ 0
$\leq$	$\Leftrightarrow$	≥ 0
$=$	$\Leftrightarrow$	Unrestricted
Variables		***Constraints***
≥ 0	$\Leftrightarrow$	$\geq$
≤ 0	$\Leftrightarrow$	$\leq$
Unrestricted	$\Leftrightarrow$	$=$

Summary of the rules for constructing the dual. Table 4.2 summarizes the primal–dual rules as they are usually presented in the literature. It is a good exercise to verify that these explicit rules are subsumed by the two rules in Table 4.1.

Note that the column headings in the table do not use the designation primal and dual. What matters here is the sense of optimization. If the primal is maximization, then the dual is minimization, and vice versa. Note also that no provision is made for including artificial variables in the primal because artificial variables would not change the definition of the dual (see Problem 4-5).

4.2 PRIMAL–DUAL RELATIONSHIPS

Changes made in the data of an LP model can affect the optimality and/or the feasibility of the current optimum solution. This section introduces a number of primal–dual relationships that can be used to recompute the elements of the optimal simplex tableau. These relationships form the basis for the economic interpretation of the LP model and for post-optimality analysis.

The section starts with a brief review of matrices, a convenient tool for carrying out the simplex tableau computations. A more detailed review of matrices is given in Appendix D on the website.

4.2.1 Review of Simple Matrix Operations

The simplex tableau can be generated by three elementary matrix operations: (row vector) $\times$ (matrix), (matrix) $\times$ (column vector), and (scalar) $\times$ (matrix). These operations are summarized here for convenience. First, we introduce some matrix definitions:

1. A *matrix*, **A**, of size $(m \times n)$ is a rectangular array of elements with m rows and n columns.
2. A *row vector*, **V**, of size m is a $(1 \times m)$ matrix.
3. A *column vector*, **P**, of size n is an $(n \times 1)$ matrix.

These definitions can be represented mathematically as

$$\mathbf{V} = (v_1, v_2, \ldots, v_m),\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\ \mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \cdots \\ p_n \end{pmatrix}$$

1. **(Row vector $\times$ matrix, VA).** The operation is valid only if the size of the row vector **V** and the number of rows of **A** are equal. For example,

$$(11, 22, 33)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = (1 \times 11 + 3 \times 22 + 5 \times 33, 2 \times 11 + 4 \times 22 + 6 \times 33)$$
$$= (242, 308)$$

2. **(Matrix $\times$ column vector, AP).** The operation is valid only if the number of columns of **A** and the size of column vector **P** are equal. For example,

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 \\ 22 \\ 33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 11 + 3 \times 22 + 5 \times 33 \\ 2 \times 11 + 4 \times 22 + 6 \times 33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 242 \\ 308 \end{pmatrix}$$

3. **(Scalar $\times$ matrix, αA).** Given the scalar (or constant) quantity α, the multiplication operation $\alpha\mathbf{A}$ results in a matrix of the same size as matrix **A**. For example, given $\alpha = 10$,

$$(10)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 40 & 50 & 60 \end{pmatrix}$$

4.2.2 Simplex Tableau Layout

The simplex tableau in Chapter 3 is the basis for the presentation in this chapter. Figure 4.1 represents the *starting* and *general* simplex tableaus schematically. In the starting tableau, the constraint coefficients under the starting variables form an **identity matrix** (all main-diagonal elements are 1, and all off-diagonal elements are zero). With this arrangement, subsequent iterations of the simplex tableau generated by the Gauss–Jordan row operations (see Chapter 3) modify the elements of the identity matrix to produce what is known as the **inverse matrix**. As we will see in the remainder of this chapter, the inverse matrix is key to computing all the elements of the associated simplex tableau.

Remarks. The inverse matrix in the *general* tableau has its roots in the *starting* tableau constraint columns. That means that the inverse at any iteration can be computed (from scratch) using the original constraint columns of the LP problem (as will be demonstrated in the remarks following Example 4.2-1). This is an important relationship that has been exploited to control round-off errors in the simplex algorithm computations.

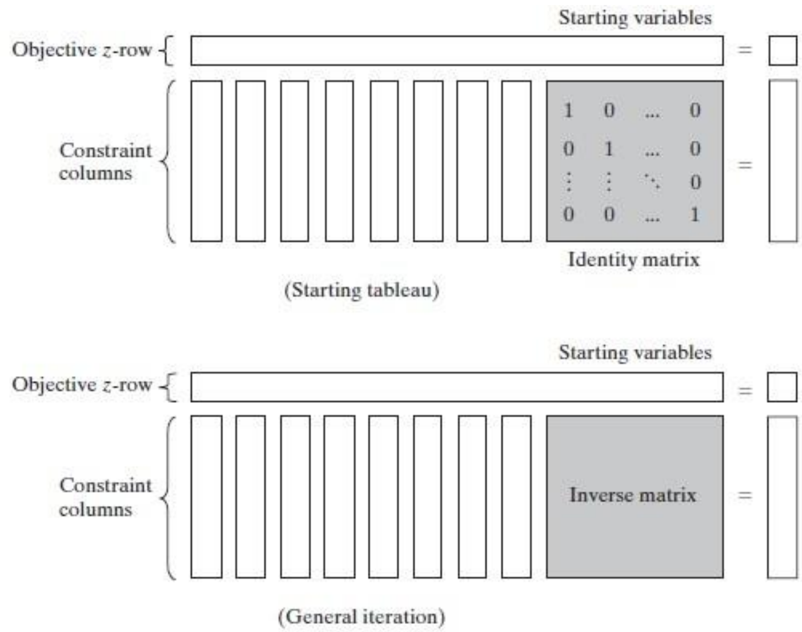


FIGURE 4.1

Schematic representation of the starting and general simplex tableaus

4.2.3 Optimal Dual Solution

The primal and dual solutions are closely related, in the sense that the optimal solution of either problem directly yields the optimal solution to the other, as is explained subsequently. Thus, in an LP model in which the number of variables is considerably smaller than the number of constraints, computational savings *may* be realized by solving the dual because the amount of computations associated with determining the inverse matrix primarily increases with the number of constraints. Notice that the rule addresses only the amount of computations in *each iteration* but says nothing about the *total number of iterations* needed to solve each problem.

This section provides two methods for determining the dual values.

Method 1.

$$\begin{pmatrix}\text{Optimal value of}\\ \textit{dual}\text{ variable } y_i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Optimal primal } z\text{-coefficient of } \textit{starting} \text{ basic variable } x_i\\ +\\ \textit{Original} \text{ objective coefficient of } x_i\end{pmatrix}$$

Method 2.

$$\begin{pmatrix}\text{Optimal values}\\ \text{of } \textit{dual} \text{ variables}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Row vector of}\\ \textit{original} \text{ objective coefficients}\\ \text{of optimal } \textit{primal} \text{ basic variables}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{Optimal } \textit{primal}\\ \text{inverse}\end{pmatrix}$$

The elements of the row vector must appear in the same order the basic variables are listed in the Basic-column of the simplex tableau.

Example 4.2-1

Consider the following LP:

$$\text{Maximize } z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$$

Subject to

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10$$
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

To prepare the problem for solution by the simplex method, we add a slack x_4 in the first constraint and an artificial R in the second. The resulting primal and the associated dual problems are thus defined as follows:

Primal	Dual
Maximize $z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 - MR$	Minimize $w = 10y_1 + 8y_2$
subject to	subject to
$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10$	$y_1 + 2y_2 \geq 5$
$2x_1 - x_2 + 3x_3 + R = 8$	$2y_1 - y_2 \geq 12$
$x_1, x_2, x_3, x_4, R \geq 0$	$y_1 + 3y_2 \geq 4$
	$y_1 \geq 0$
	$y_2 \geq -M$ ($\Rightarrow y_2$ unrestricted)

Table 4.3 provides the optimal primal tableau.

We now show how the optimal dual values are determined using the two methods described at the start of this section.

Method 1. In Table 4.3, the starting primal variables x_4 and R uniquely correspond to the dual variables y_1 and y_2, respectively. Thus, we determine the optimum dual solution as follows:

Starting primal basic variables	x_4	R
z-equation coefficients	$\frac{29}{5}$	$-\frac{2}{5} + M$
Original objective coefficient	0	$-M$
Dual variables	y_1	y_2
Optimal dual values	$\frac{29}{5} + 0 = \frac{29}{5}$	$-\frac{2}{5} + M + (-M) = -\frac{2}{5}$

Method 2. The optimal inverse matrix, highlighted in Table 4.3 under the starting variables x_4 and R, is

$$\text{Optimal inverse} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

TABLE 4.3 Optimal Tableau of the Primal of Example 4.2-1

Basic	x_1	x_2	x_3	x_4	R	Solution
z	0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{29}{5}$	$-\frac{2}{5}+M$	$54\frac{4}{5}$
x_2	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{12}{5}$
x_1	1	0	$\frac{7}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{26}{5}$

The order of the optimal primal basic variables in the Basic-column is x_2 followed by x_1. The elements of the original objective coefficients for the two variables must appear in the same order—namely,

$$
\begin{aligned}
(\text{Original objective coefficients}) &= (\text{Coefficient of } x_2, \text{ coefficient of } x_1)\\
&= (12, 5)
\end{aligned}
$$

The optimal dual values are

$$
\begin{aligned}
(y_1, y_2) &= \begin{pmatrix}\text{Original objective}\\ \text{coefficients of } x_2, x_1\end{pmatrix} \times (\text{Optimal inverse})\\
&= (12, 5)\begin{pmatrix}\frac{2}{5} & -\frac{1}{5}\\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5}\end{pmatrix}\\
&= \left(\tfrac{29}{5}, -\tfrac{2}{5}\right)
\end{aligned}
$$

Remarks. We pause here to demonstrate the important relationship between the *inverse matrix* in a simplex tableau and the associated *basic matrix* obtained from original constraint columns in the starting tableau. For example, in the optimal tableau, the basic variables, *taken in order*, are (x_2, x_1). Hence, the associated (optimal) basic matrix is obtained from the original problem as

$$
\begin{pmatrix}\text{Optimal}\\ \text{basic}\\ \text{matrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Constraint} & \text{Constraint}\\ \text{column of} & \text{column of}\\ x_2 & x_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}
$$

When this basic matrix is *inverted* (using one of the methods in Appendix D on the website), it will yield the inverse in the optimum tableau. We can verify that this is true because matrix theory tells us that the product of the basic matrix and its inverse must be an identity matrix; namely,

$$
\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\frac{2}{5} & -\frac{1}{5}\\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}
$$

The relationship holds true for *any* simplex iteration. Note importantly that the columns of the basic matrix must coincide with the order of the basic variables in the tableau.

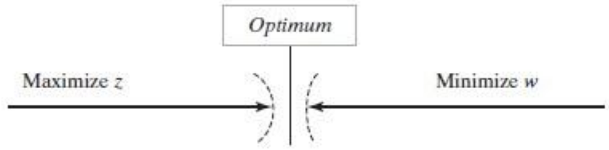


FIGURE 4.2
Relationship between maximum z and minimum w

Primal–dual objective values. For any pair of *feasible* primal and dual solutions,

$$\begin{pmatrix}\text{Objective value in the}\\ \textit{maximization}\text{ problem}\end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix}\text{Objective value in the}\\ \textit{minimization}\text{ problem}\end{pmatrix}$$

At the optimum, the relationship holds as a strict equation, meaning that the two objective values are equal. Note that the relationship does not specify which problem is primal and which is dual. Only the sense of optimization (maximization or minimization) is important in this case.

The optimum cannot occur with z strictly less than w (i.e., $z < w$) because, no matter how close the two values are, there is always room for improvement, which contradicts optimality as Figure 4.2 demonstrates.

Example 4.2-2

In Example 4.2-1, $(x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = \frac{8}{3})$ and $(y_1 = 6, y_2 = 0)$ are (arbitrary) feasible primal and dual solutions. The associated values of the objective functions are

$$\text{Maximization (primal)}: z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 = 5(0) + 12(0) + 4(\tfrac{8}{3}) = 10\tfrac{2}{3}$$

$$\text{Minimization (dual)}: w = 10y_1 + 8y_2 = 10(6) + 8(0) = 60$$

Since $z < w$, the solutions are not optimal. The optimum value of $z\left(= 54\frac{4}{5}\right)$ falls within the range $\left(10\frac{2}{3}, 60\right)$.

4.2.4 Simplex Tableau Computations

This section shows how *any iteration* of the simplex tableau can be generated from the *original* data of the problem, the *inverse* associated with the iteration, and the dual problem. Using the layout of the simplex tableau in Figure 4.1, we can divide the computations into two types:

1. Constraint columns (left-hand and right-hand sides).
2. Objective z-row.

Formula 1: Constraint column computations. In any simplex iteration, a left-hand or a right-hand side column is computed as follows:

$$\begin{pmatrix}\text{Constraint column}\\ \text{in iteration } i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Inverse in}\\ \text{iteration } i\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{Original}\\ \text{constraint column}\end{pmatrix}$$

Formula 2: Objective *z*-row computations. In any simplex iteration, the objective equation coefficient (reduced cost) of x_j is computed as follows:

$$\begin{pmatrix} \textit{Primal } z\text{-equation} \\ \text{coefficient of variable } x_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Left-hand side of} \\ j\text{th } \textit{dual} \text{ constraint} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{Right-hand side of} \\ j\text{th } \textit{dual} \text{ constraint} \end{pmatrix}$$

Example 4.2-3

We use the LP in Example 4.2-1 to illustrate the application of Formulas 1 and 2. From the optimal tableau in Table 4.3, we have

$$\text{Optimal inverse} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1\text{-column in} \\ \text{optimal iteration} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Inverse in} \\ \text{optimal iteration} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \text{original} \\ x_1\text{-column} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Similar computations generate the optimal columns for x_2, x_3, x_4, R, and the right-hand side (verify!).

Next, we demonstrate how the objective row computations are carried out with Formula 2. The optimal values of the dual variables, $(y_1, y_2) = (\frac{29}{5}, -\frac{2}{5})$, are computed in Example 4.2-1. These values are used in Formula 2 to compute all the z-coefficients, as illustrated here for x_1 and R.

$$z\text{-cofficient of } x_1 = y_1 + 2y_2 - 5 = \tfrac{29}{5} + 2 \times -\tfrac{2}{5} - 5 = 0$$

$$z\text{-cofficient of } R = y_2 - (-M) = -\tfrac{2}{5} - (-M) = -\tfrac{2}{5} + M$$

Similar computations can be used to determine the z-coefficients of x_2, x_3, and x_4 (verify!).

Remarks. The simplex tableau format in Chapter 3 which generates the current tableau from the immediately preceding one is a sure recipe for propagating the round-off error, greatly distorting the quality of the optimum solution. Fortunately there is a way out! You will notice from the discussion in Sections 4.2.2 and 4.2.3 that the *inverse matrix* of an iteration plays *the* key role in determining all the elements of the associated simplex tableau (by using this inverse and the *original* data of the problem). Indeed, the inverse itself can be determined from the original data once the basic solution is known, as demonstrated in the remarks following Example 4.2-1. This essentially means that at any iteration, *all* the elements of a tableau (inverse matrix included) can be determined from the original data of the model. This is a powerful result that has been used to keep computational round-off error in check. And this is precisely the overriding reason for the development of the *revised simplex method* presented in Chapter 7.

5.1 DEFINITION OF THE TRANSPORTATION MODEL

The problem is represented by the network in Figure 5.1. There are m sources and n destinations, each represented by a **node**. The **arcs** represent the routes linking the sources and the destinations. Arc (i, j) joining source i to destination j carries two pieces of information: the transportation cost per unit, c_{ij}, and the amount shipped, x_{ij}. The amount of supply at source i is a_i, and the amount of demand at destination j is b_j. The objective of the model is to minimize the total transportation cost while satisfying all the supply and demand restrictions.

Example 5.1-1

MG Auto has three plants in Los Angeles, Detroit, and New Orleans and two major distribution centers in Denver and Miami. The quarterly capacities of the three plants are 1000, 1500, and 1200 cars, and the demands at the two distribution centers for the same period are 2300 and 1400 cars. The mileage chart between the plants and the distribution centers is given in Table 5.1.

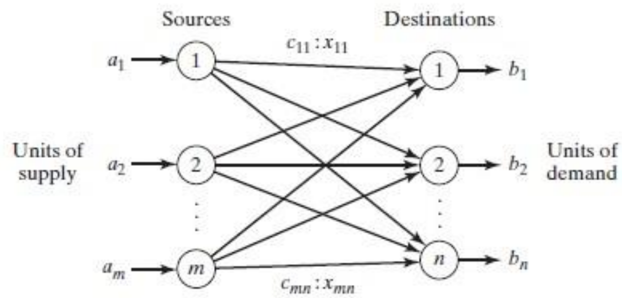


FIGURE 5.1

Representation of the transportation model with nodes and arcs

TABLE 5.1 Mileage Chart

	Denver	Miami
Los Angeles	1000	2690
Detroit	1250	1350
New Orleans	1275	850

The trucking company in charge of transporting the cars charges 8 cents per mile per car. Thus, the transportation costs per car on the different routes, rounded to the closest dollar, are computed from Table 5.1 as shown in Table 5.2.

The LP model of the problem is

$$\text{Minimize } z = 80x_{11} + 215x_{12} + 100x_{21} + 108x_{22} + 102x_{31} + 68x_{32}$$

subject to

$$\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad &= 1000 \text{ (Los Angeles)} \\
x_{21} + x_{22} \qquad\qquad\quad &= 1500 \text{ (Detroit)} \\
+ x_{31} + x_{32} &= 1200 \text{ (New Oreleans)} \\
x_{11} \qquad + x_{21} \qquad + x_{31} \qquad &= 2300 \text{ (Denver)} \\
x_{12} \qquad + x_{22} \qquad + x_{32} &= 1400 \text{ (Miami)} \\
x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, 3, j = 1, 2 &
\end{aligned}$$

All the constraints are equations because the total supply $(= 1000 + 1500 + 1200 = 3700 \text{ cars})$ equals the total demand $(= 2300 + 1400 = 3700 \text{ cars})$.

TABLE 5.2 Transportation Cost per Car

	Denver (1)	Miami (2)
Los Angeles (1)	\$80	\$215
Detroit (2)	\$100	\$108
New Orleans (3)	\$102	\$68

TABLE 5.3 MG Transportation Model

	Denver	Miami	Supply
Los Angeles	80 x_{11}	215 x_{12}	**1000**
Detroit	100 x_{21}	108 x_{22}	**1500**
New Orleans	102 x_{31}	68 x_{32}	**1200**
Demand	**2300**	**1400**	

The special structure of the transportation problem allows a compact representation of the problem using the **transportation tableau** format in Table 5.3. This format is convenient for modeling many situations that do not deal with transporting goods, as demonstrated in Section 5.2.

The optimal solution in Figure 5.2 (obtained by TORA[1]) ships 1000 cars from Los Angeles to Denver ($x_{11} = 1000$), 1300 from Detroit to Denver ($x_{21} = 1300$), 200 from Detroit to Miami ($x_{22} = 200$), and 1200 from New Orleans to Miami ($x_{32} = 1000$). The associated minimum transportation cost is computed as $1000 \times \$80 + 1300 \times \$100 + 200 \times \$108 + 1200 \times \$68 = \$313,200$.

Balancing the transportation model. The transportation tableau representation assumes that model is balanced, meaning that the total demand equals to the total supply (which happened to be true—coincidentally—in the MG model). If the model is unbalanced, a dummy source or a dummy destination must be added to restore balance.

Example 5.1-2

In the MG model, suppose that the Detroit plant capacity is 1300 cars (instead of 1500). The total supply ($= 3500$ cars) is less than the total demand ($= 3700$ cars), meaning that part of the demand at Denver and Miami will not be satisfied.

Because the demand exceeds the supply, a dummy plant (source) with a capacity of 200 cars ($= 3700 - 3500$) is added to balance the model. The unit transportation cost from the dummy plant to the two destinations is zero because the plant does not exist.

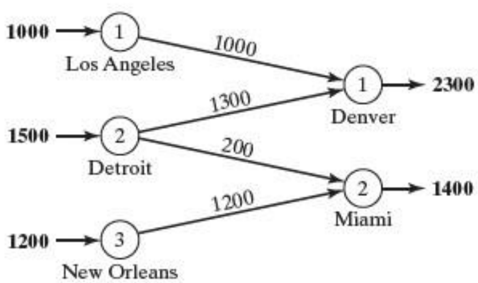


FIGURE 5.2

Optimal solution of MG Auto model

TABLE 5.4 MG Model with Dummy Plant

	Denver	Miami	Supply
Los Angeles	80 **1000**	215	**1000**
Detroit	100 **1300**	108	**1300**
New Orleans	102	68 **1200**	**1200**
Dummy Plant	0	0 **200**	**200**
Demand	**2300**	**1400**	

Table 5.4 gives the balanced model together with its optimum solution. The solution shows that the dummy plant ships 200 cars to Miami, which means that Miami will be 200 cars short of satisfying its demand of 1400 cars.

We can make sure that a specific destination does not experience shortage by assigning a very high unit transportation cost from the dummy source to that destination. For example, a penalty of \$1000 in the dummy-Miami cell will prevent shortage at Miami. Of course, we cannot use this "trick" with all the destinations, because shortage must take place somewhere.

The case where the supply exceeds the demand can be demonstrated by assuming that the demand at Denver is 1900 cars only. In this case, we need to add a dummy distribution center to "receive" the surplus supply. Again, the unit transportation cost to the dummy distribution center is zero, unless we require a factory to "ship out" completely. In this case, a high unit transportation cost is assigned from the designated factory to the dummy destination.

Table 5.5 gives the new model and its optimal solution (obtained by TORA). The solution shows that the Detroit plant will have a surplus of 400 cars.

TABLE 5.5 MG Model with Dummy Destination

	Denver	Miami	Dummy	
Los Angeles	80 **1000**	215	0	**1000**
Detroit	100 **900**	108 **200**	0 **400**	**1500**
New Orleans	102	68 **1200**	0	**1200**
Demand	**1900**	**1400**	**400**	

In 1781, French mathematician Gaspard Monge (1746–1818), working with Napoleon Bonaparte's army, published a mathematical model dealing with transporting soil at the least possible cost among different construction sites for the purpose of building military forts and roads. Though Monge laid a theoretical foundation for solving the transportation problem, no algorithm was developed until 1941 when American mathematician Frank L. Hitchcock (1875–1957) published his solution of Monge's problem. In 1939, Russian economist Leonid V. Kantorovich published a booklet titled *The Mathematical Method of Production Planning and Organization* that in effect laid the foundation for today's linear programming. However, Kantorovich did not become aware of Monge's 1781 paper until 1947 when he immediately recognized the similarities between his work and Monge's. Meanwhile, Dutch American Tjalling C. Koopmans (1910–1985) had been studying the transportation problem independently in support of WWII efforts, and it was only in the late 1950s that he discovered Kantorovich's work on linear programming and transportation. Koopmans was instrumental in reprinting Kantorovich's booklet in the United States,[3] ushering the dissemination of Kantorovich's work in the West. By then, American mathematician George B. Danzig had already developed his simplex method in 1947 for solving any linear programming problem, including the transportation model.

In 1975, Leonid V. Kantorovich and Tjalling C. Koopmans shared the Nobel Prize in Economics.

5.2 NONTRADITIONAL TRANSPORTATION MODELS

The application of the transportation model is not limited to *transporting* goods. This section presents two nontraditional applications in the areas of production-inventory control and tool sharpening service.

Example 5.2-1 (Production-Inventory Control)

Boralis manufactures backpacks for serious hikers. The demand for its product during the peak period of March to June of each year is 100, 200, 180, and 300 units, respectively. The company uses part-time labor to accommodate fluctuations in demand. It is estimated that Boralis can produce 50, 180, 280, and 270 units in March through June. A current month's demand may be satisfied in one of three ways.

1. Current month's production at the cost of \$40 per pack.
2. Surplus production in an earlier month at an additional holding cost of \$.50 per pack per month
3. Surplus production in a later month (back-ordering) at an additional penalty cost of \$2.00 per pack per month.

Boralis wishes to determine the optimal production schedule for the four months.

The following table summarizes the parallels between the elements of the production-inventory problem and the transportation model:

Transportation	Production inventory
1. Source i	1. Production period i
2. Destination j	2. Demand period j
3. Supply amount at source i	3. Production capacity of period i
4. Demand at destination j	4. Demand for period j
5. Unit transportation cost from source i to destination j	5. Unit cost (production + holding + penalty) in period i for period j

The resulting transportation model is given in Table 5.6.

The unit "transportation" cost from period i to period j is computed as

$$c_{ij} = \begin{cases} \text{Production cost in } i, i = j \\ \text{Production cost in } i + \text{holding cost from } i \text{ to } j, i < j \\ \text{Production cost in } i + \text{penaty cost from } i \text{ to } j, i > j \end{cases}$$

For example,

$$c_{11} = \$40.00$$

$$c_{24} = \$40.00 + (\$.50 + \$.50) = \$41.00$$

$$c_{41} = \$40.00 + (\$2.00 + \$2.00 + \$2.00) = \$46.00$$

The optimal solution is summarized in Figure 5.3. The dashed lines indicate back-ordering, the dotted lines indicate production for a future period, and the solid lines show production in a period for itself. The total cost is $31,455.

TABLE 5.6 Transportation Model for Example 5.2-1

	1	2	3	4	Capacity
1	$40.00	$40.50	$41.00	$41.50	**50**
2	$42.00	$40.00	$40.50	$41.00	**180**
3	$44.00	$42.00	$40.00	$40.50	**280**
4	$46.00	$44.00	$42.00	$40.00	**270**
Demand	**100**	**200**	**180**	**300**	

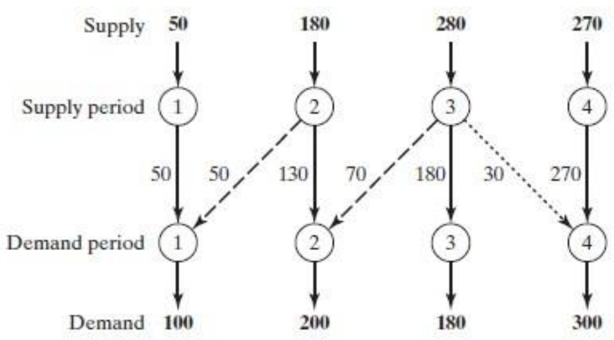


FIGURE 5.3

Optimal solution of the production-inventory model

6.1 SCOPE AND DEFINITION OF NETWORK MODELS

Many operations research situations can be modeled and solved as networks (nodes connected by branches):

1. Design of an offshore natural-gas pipeline network connecting wellheads in the Gulf of Mexico to an inshore delivery point with the objective of minimizing the cost of constructing the pipeline.
2. Determination of the shortest route between two cities in an existing network of roads.
3. Determination of the maximum capacity (in tons per year) of a coal slurry pipeline network joining coal mines in Wyoming with power plants in Houston. (Slurry pipelines transport coal by pumping water through specially designed pipes.)
4. Determination of the time schedule (start and completion dates) for the activities of a construction project.
5. Determination of the minimum-cost flow schedule from oil fields to refineries through a pipeline network.

The solution of these situations is accomplished through a variety of network optimization algorithms. This chapter presents four of these algorithms.

1. Minimal spanning tree (situation 1)
2. Shortest-route algorithm (situation 2)
3. Maximal-flow algorithm (situation 3)
4. Critical Path Method (CPM) algorithm (situation 4)

For the fifth situation, the minimum-cost capacitated network algorithm is presented in Section 22.1 on the website.

Network definitions. A network consists of a set of **nodes** linked by **arcs** (or **branches**). The notation for describing a network is (N, A), where N is the set of nodes, and A is the set of arcs. As an illustration, the network in Figure 6.1 is described as

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$A = \{(1,2), (1,3), (2,3), (2,5), (3,4), (3,5), (4,2), (4,5)\}$$

Associated with each network is a **flow** (e.g., oil products flow in a pipeline and automobile traffic flow in highways). The maximum flow in a network can be finite or infinite, depending on the capacity of its arcs.

An arc is said to be **directed** or **oriented** if it allows positive flow in one direction only. A **directed network** has all directed arcs.

A **path** is a set of arcs joining two distinct nodes, passing through other nodes in the network. For example, in Figure 6.1, arcs $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$, and $(4, 5)$ form a path between nodes 1 and 5. A path forms a **cycle** or a **loop** if it connects a node back to itself through other nodes. In Figure 6.1, arcs $(2, 3)$, $(3, 4)$, and $(4, 2)$ form a cycle.

A network is said to be **connected** if every two distinct nodes are linked by at least one path. The network in Figure 6.1 demonstrates this type of network. A **tree** is a *cycle-free* connected network comprised of a *subset* of all the nodes, and a **spanning tree** links *all* the nodes of the network. Figure 6.2 provides examples of a tree and a spanning tree from the network in Figure 6.1.

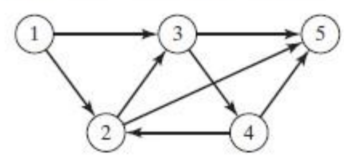
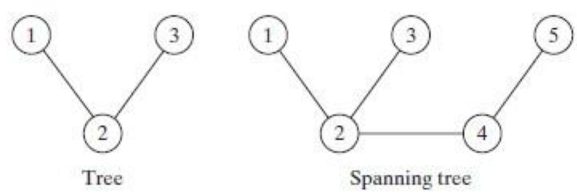


FIGURE 6.1
Example of (N, A) Network

FIGURE 6.2
Examples of a tree and a spanning tree



Example 6.1-1 (Bridges of Königsberg)

The Prussian city of Königsberg (now Kalingrad in Russia) was founded in 1254 on the banks of river Pergel with seven bridges connecting its four sections (labeled A, B, C, and D) as shown in Figure 6.3. A question was raised as to whether a *round-trip* could be constructed to visit all four sections of the city, crossing each bridge exactly once. A section could be visited multiple times, if necessary.

In the mid-eighteenth century, the famed mathematician Leonhard Euler developed a special "path construction" argument to prove that it was impossible to construct such a trip. Later, in the early nineteenth century, the same problem was solved by representing the situation as a network with nodes representing the sections and (distinct) arcs representing the bridges, as shown in Figure 6.4.

FIGURE 6.3
Bridges of Königsberg

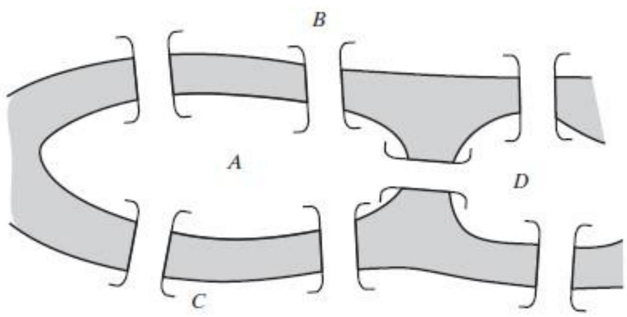
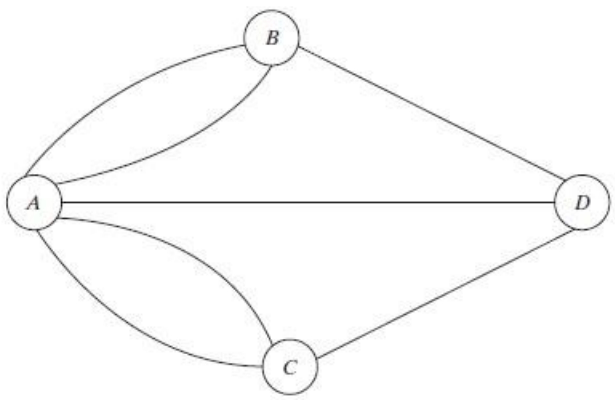


FIGURE 6.4
Network representation of Königsberg problem



In OR, this cannot be more true than in a network model. Network representation provides, at a glance, all the information about a problem, an outstanding feature indeed. And this all happens because of the simplicity and versatility of the ensemble of nodes and arcs in modeling many real-life situations. To be sure, the Bridges of Königsberg problem was solved by Leonard Euler in the eighteenth century using lengthy logical arguments. In the process, Euler laid the foundation for the network representation of the situation (Figure 6.4) that made the answer almost intuitive. Euler's work was the seed for what is currently known as *graph theory*, with its present immense contribution to solving intricate real-life problems.

The network representation greatly facilitates the development of almost intuitive algorithmic rules. This point of view is supported by G. Dantzig, R. Fulkerson, and S. Johnson in their 1954 seminal paper (see bibliography of Chapter 11) for solving a 49-city traveling salesman problem *by hand* using a network representation imposed on a map of the United States. They state, "...This [network representation] speeds up the entire iterative process, makes it easy to follow, and sometimes makes it easy to develop new restraints that are not likely to be obtained by less visual methods."

6.2 MINIMAL SPANNING TREE ALGORITHM

The minimal spanning tree links the nodes of a network using the smallest total length of connecting branches. A typical application occurs in the pavement of roads linking towns, either directly or passing through other towns. The minimal spanning tree solution provides the most economical design of the road system.

Let $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ be the set of nodes of the network and define

C_k = Set of nodes that have been permanently connected at iteration k

$\overline{C}_k$ = Set of nodes as yet to be connected permanently after iteration k

The following steps describe the minimal spanning tree algorithm:

Step 0. Set $C_0 = \varnothing$ and $\overline{C}_0 = N$.

Step 1. Start with *any* node i in the unconnected set $\overline{C}_0$ and set $C_1 = \{i\}$, rendering $\overline{C}_1 = N - \{i\}$. Set $k = 2$.

General step *k*. Select a node, j^*, in the unconnected set $\overline{C}_{k-1}$ that yields the shortest arc to a node in the connected set C_{k-1}. Link j^* permanently to C_{k-1} and remove it from $\overline{C}_{k-1}$ to obtain C_k and $\overline{C}_k$, respectively. Stop if $\overline{C}_k$ is empty; else, set $k = k + 1$ and repeat the step.

Example 6.2-1

Midwest TV Cable Company is providing cable service to five new housing developments. Figure 6.5 depicts possible TV connections to the five areas, with cable miles affixed on each arc. The goal is to determine the most economical cable network.

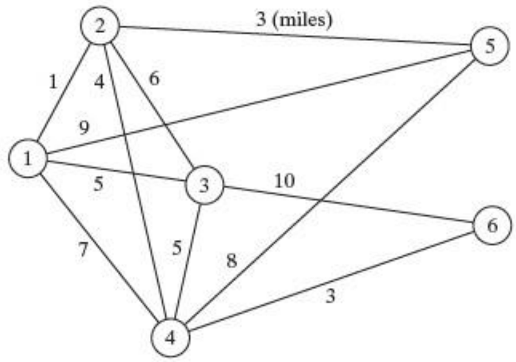


FIGURE 6.5

Cable connections for Midwest TV Company

The algorithm starts at node 1 (actually, any other node can be a starting point), which gives $C_1 = \{1\}$ and $\overline{C}_1 = \{2, 3, 4, 5, 6\}$. The iterations of the algorithm are summarized in Figure 6.6. The thin arcs provide all the candidate links between C and $\overline{C}$. The thick arcs are the permanent links of the connected set C, and the dashed arc is the new (permanent) link added at each iteration. For example, in iteration 1, branch $(1, 2)$ is the shortest link ($= 1$ mile) among all the candidate branches from node 1 to nodes 2, 3, 4, and 5 in the unconnected set $\overline{C}_1$. Hence, link $(1, 2)$ is made permanent and $j^* = 2$, which yields $C_2 = \{1, 2\}$, $\overline{C}_2 = \{3, 4, 5, 6\}$.

The solution is given by the minimal spanning tree shown in iteration 6 of Figure 6.6. The resulting minimum cable miles needed to provide the desired cable service are $1 + 3 + 4 + 3 + 5 = 16$ miles.

Remarks. In theory, a minimal spanning tree can be formulated and solved as a linear program. However, LP is not a practical option because numerous constraints must be added to exclude all cycles, resulting in a huge LP, even for small networks.

TORA Moment

You can use TORA to generate the iterations of the minimal spanning tree. From Main menu, select Network models $\Rightarrow$ Minimal spanning tree. Next, from SOLVE/MODIFY menu, select Solve problem $\Rightarrow$ Go to output screen. In the output screen, select a Starting node, then use Next iteration or All iterations to generate the successive iterations. You can restart the iterations by selecting a new Starting Node. File *toraEx6.2-1.txt* gives TORA's data for Example 6.2-1.

6.3 SHORTEST-ROUTE PROBLEM

The shortest-route problem determines the shortest route between a source and destination in a transportation network. Other situations can be represented by the same model, as illustrated by the following examples.

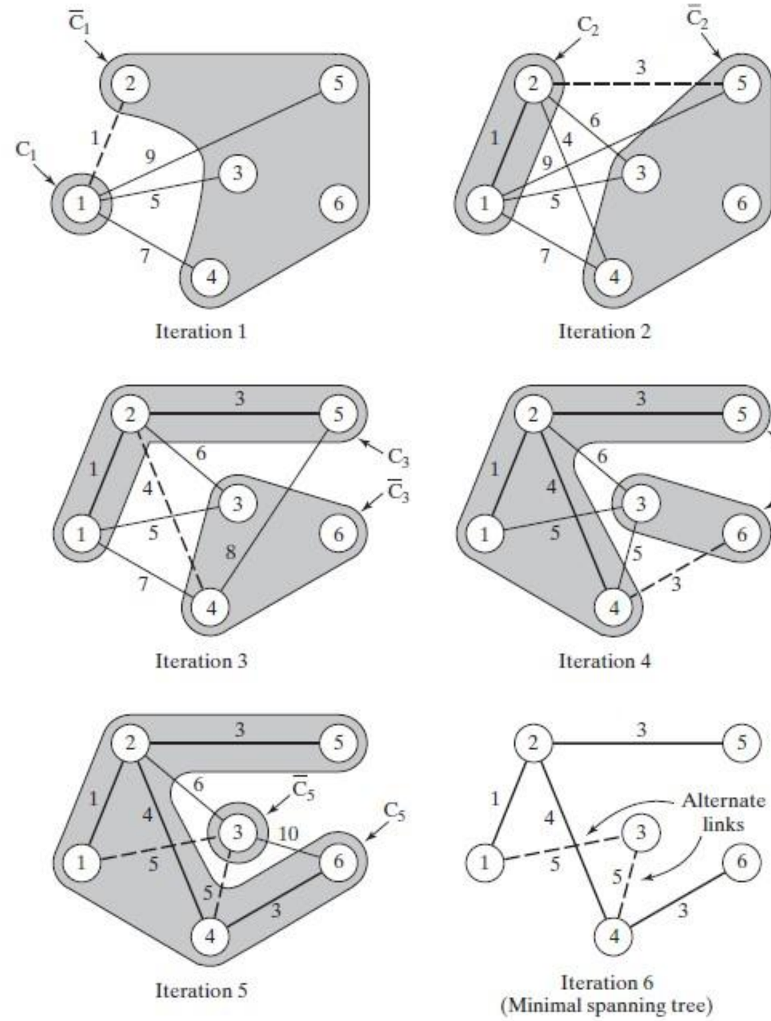


FIGURE 6.6
Solution iterations for Midwest TV Company

6.3.1 Examples of the Shortest-Route Applications

Example 6.3-1 (Equipment Replacement)

RentCar is developing a replacement policy for its car fleet over a 4-year planning horizon. At the start of each year, a car is either replaced or kept in operation for an extra year. A car must be in service from 1 to 3 years. The following table provides the replacement cost as a function of the year a car is acquired and the number of years in operation.

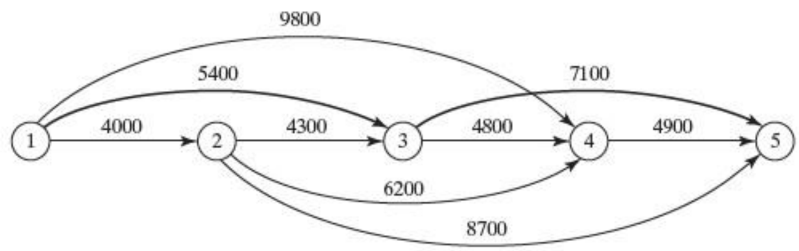


FIGURE 6.7

Equipment replacement problem as a shortest-route model

Equipment acquired at start of year	Replacement cost ($) for given years in operation		
	1	*2*	*3*
1	4000	5400	9800
2	4300	6200	8700
3	4800	7100	—
4	4900	—	—

The problem can be formulated as a network in which nodes 1 to 5 represent the start of years 1 to 5. Arcs from node 1 (year 1) can reach nodes 2, 3, and 4 because a car must be in operation from 1 to 3 years. The arcs from the other nodes can be interpreted similarly. The length of each arc equals the replacement cost. The solution of the problem is equivalent to finding the shortest route between nodes 1 and 5.

Figure 6.7 shows the resulting network. Using TORA,[1] the shortest route is $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5$. The solution says that a car acquired at the start of year 1 (node 1) must be replaced after 2 years at the start of year 3 (node 3). The replacement car will then be kept in service until the end of year 4. The total cost of this replacement policy is \$12,500 (= \$5,400 + \$7,100).

Example 6.3-2 (Most Reliable Route)

I. Q. Smart drives daily to work. Having just completed a course in network analysis, Smart is able to determine the shortest route to work. Unfortunately, the selected route is heavily patrolled by police, and with all the fines paid for speeding, the shortest route may not be the best choice. Smart has thus decided to choose a route that maximizes the probability of *not* being stopped by police.

The network in Figure 6.8 shows the possible routes from home to work, and the associated probabilities of not being stopped on each segment. The probability of not being stopped on a route is the product of the probabilities of its segments. For example, the probability of not receiving a fine on the route $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 7$ is $.9 \times .3 \times .25 = .0675$. Smart's objective is to select the route that *maximizes* the probability of not being fined.

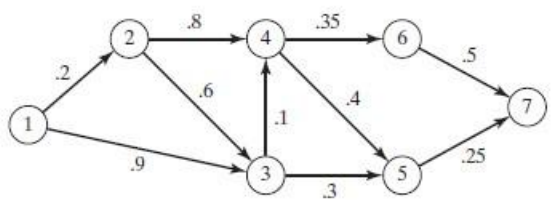


FIGURE 6.8
Most-reliable-route network model

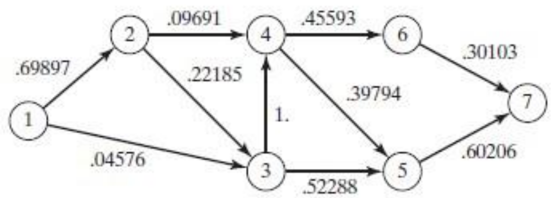


FIGURE 6.9
Most-reliable-route representation as a shortest-route model

The problem can be formulated as a shortest-route model by using logarithmic transformation to convert the product probability into the sum of the logarithms of probabilities—that is, $p_{1k} = p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_k$ is transformed to $\log p_{1k} = \log p_1 + \log p_2 + \ldots + \log p_k$.

The two functions p_{1k} and $\log p_{1k}$ are both monotone decreasing in k; thus maximizing p_{1k} is equivalent to maximizing $\log p_{1k}$, which in turn is equivalent to *minimizing* $-\log p_{1k}$. Thus, replacing p_j with $-\log p_j$ for all j in the network, the problem is converted to the shortest-route network in Figure 6.9.

Using TORA, the shortest route in Figure 6.9 passes through nodes 1, 3, 5, and 7 with a corresponding "length" of 1.1707, or $\log p_{17} = -1.1707$. Thus, the maximum probability of not being stopped is $p_{17} = 10^{-1.1707} = .0675$, not a very encouraging news for Smart!

Example 6.3-3 (Three-Jug Puzzle)

An 8-gallon jug is filled with fluid. Given two empty 5- and 3-gallon jugs, divide the 8 gallons of fluid into two equal parts using only the three jugs. What is the smallest number of transfers (decantations) needed to achieve this result?

You probably can solve this puzzle by inspection. Nevertheless, the representation of the problem as a shortest-route model is interesting.

A node is defined by a triple index representing the amounts of fluid in the 8-, 5-, and 3-gallon jugs, respectively. This means that the network starts with node $(8, 0, 0)$ and terminates with the desired solution node $(4, 4, 0)$. A new node is generated from the current node by decanting fluid from one jug into another.

Figure 6.10 shows different routes that lead from the start node $(8, 0, 0)$ to the end node $(4, 4, 0)$. The arc between two successive nodes represents a single transfer, and hence it can be

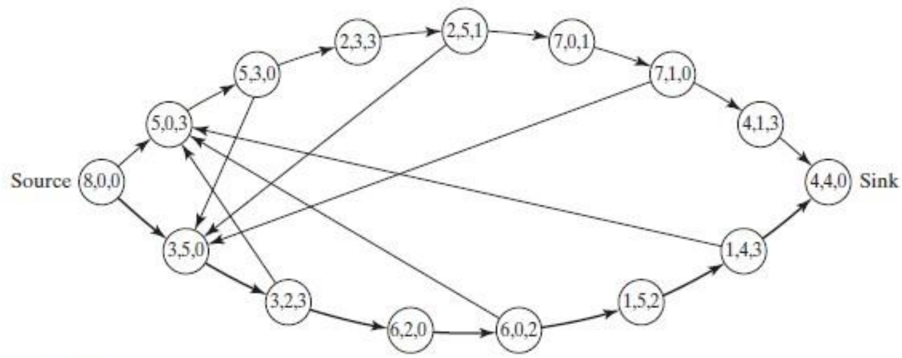


FIGURE 6.10

Three-jug puzzle representation as a shortest-route model

assumed to have a length of 1 unit. The problem reduces to determining the shortest route between node $(8, 0, 0)$ and node $(4, 4, 0)$.

The optimal solution, given by the bottom path in Figure 6.10, requires 7 decantations.