البرمجة الرياضية (Mathematical Programming).

تنقسم البرمجة الرياضية إلى عده أقسام وهي:

1 - البرمجة الخطية(LP) (Linear Programming)

تعتبر البرمجة الخطية من أهم أساليب البرمجة الرياضية Mathematical Programming و أكثرها تطبيقا في الحياة العملية لضمان الاستخدام الأ مثل للموارد في ظل إمكانيات و موارد محدودة. مثل إيجاد المزيج الأمثل من بين المنتجات التي ينتجها مصنع معين لتحقيق اكبر ربح طبقا للمتاح من العمل و المواد الخام. وكذلك مثل نقل منتجات معينة من مناطق إنتاج إلى مراكز إستهلاك بحيث تقوم كل منطقة إنتاجية بتوزيع منتجاتها إلى مراكز الإستهلاك بحيث يشبع كل مركز إستهلاكي طلبه بأقل تكلفة ممكنة. وقد كان لاستخدام طريقة السمبلكس The Simplex Method التي طورها دانتزج G. Dantzig عام 1947 م لحل البرنامج الخطي اثر كبير في زيادة و انتشار التطبيقات العملية لهذا الأسلوب وساعد على ذلك الاستعانة بالحاسبات الآلية المتطورة في حله بحيث يمكن حل برنامج يتكون من مئات المتغيرات بسهولة.

ويلاحظ أن البرنامج الخطي يتكون من دالة هدف واحدة و تكون متغيرات القرار فيه مستمرة و جميع صيغه الرياضية خطية كما أن مؤشراته لا يدخل فيها العنصر العشوائي.

2 - برمجة الأهداف(GP) (Goal Programming)

في هذا النوع من البرمجة يوجد أكثر من هدف ويعبر عن كل هدف بقيد في صورة معادلة يعرف بقيد الهدف Goal Constraint يحتوي على متغيرين انحرافيين Deviation Variables ويتم صياغة دالة الهدف في صورة تصغير مجموع متغيرات الانحرافات غير المرغوب فيها، ويمكن تقدير معامل لكل هدف يسمى معامل أولوية Priority Factor يعكس درجة تفضيل متخذ القرار ويمكن تقدير وزن نسبي لكل هدف، ويتم حل برنامج الأهداف باستخدام طريقة السمبلكس وذلك بعد تعديلها حتى تأخذ في الاعتبار معاملات الأولوية.

3 - البرمجة الصحيحة(IP) Integer Programming

في كثير من المواقف الإدارية تكون قيم متغيرات القرار أعداد صحيحة فمثلا عند اختيار التوليفة الأقل تكلفة من الطائرات المطلوب شرائها طبقا للسعر ووفق الصيانة و الطاقة الاستيعابية. فانه في مثل هذه الحالة ليس من المعقول أن تكون إعداد الطائرات في صورة كسرية. و كذلك عند اختيار التوليفة الأكثر ربحا من بين المشروعات المطلوب إنشاء وها طبقا للموارد المالية المتاحة فليس من المناسب أن تكون أعداد المشروعات في صورة

كسرية. ويمكن التفرقة بين ثلاثة أنواع من البرمجة الصحيحة بحسب نوع متغيرات القرار التي يتضمنها البرنامج.
البرمجة الصحيحة العامة General Integer Programming وهي التي تكون جميع متغيرات القرار فيها في صورة صحيحة. و البرمجة الصحيحة الثنائية Binary Integer Programming وهي التي يمكن أن تكون فيها متغيرات القرار إما صفر أو واحد. والبرمجة الصحيحة المختلطة Mixed Integer Programming و التي تحوي على خليط من المتغيرات ذات الطبيعة الصحيحة و الكسرية. ويلاحظ أن بعض مواقف البرمجة الصحيحة لها هيكل خاص و طرق خاصة بحلها مثل مشكلة النقل Transportation Problem ومشكلة التعيين Assignment Problem و كذلك تستخدم طرق معينة لحل البرامج الصحيحة مثل السمبلكس ثم استخدام طريقة القطع Cutting Method وطريقة التفرع و الحد Branch And Bound Method. ويعيب هذه الطرق أنها تتطلب عددا كبيرا من الخطوات وخاصة مع ازدياد عدد متغيرات القرار.
4 - البرمجة غير الخطية(Non-Linear Programming (NLP
و يعتبر البرنامج غير خطي إذا تم صياغة علاقة أو أكثر من العلاقات في صورة غير خطية و يمكن حله باستخدام حساب التفاضل للحصول على قيم متغيرات القرار التي تعظم أو تخفض دالة الهدف باستخدام مضاعفات لاغرانج Lagrange Multipliers و ذلك إذا كانت القيود الهيكلية في صورة معادلات و باستخدام شروط كون توكر Khun Tucker ومضاعفات لاغرانج إذا كانت القيود الهيكلية في صورة متباينات.
5 - البرمجة التربيعية (Quadratic Programming (QP
وفي مثل هذه البرمجة تكون دالة الهدف في صورة تربيعية و القيود الهيكلية في صورة خطية وهي حالة خاصة من البرمجة غير الخطية مثل نماذج اختيار المحافظ التي تكون فيها دالة الهدف من جزأين: جزء يمثل العائد المتوقع من المحفظة في صورة خطية والجزء الآخر يمثل المخاطرة الذي يعبر عنه بتباين قيم المحفظة في صورة تربيعية. ومن الطرق المستخدمة في الحل في هذه الحالة طريقة السمبلكس لولف Wolfe's Simplex Methods For QP وهي تعتمد على استخدام مضاعفات لاغرانج وشروط كون تكر بالإضافة إلى طريقة السمبلكس.
6 - البرمجة العشوائية أو الاحتمالية: (Stochastic Programming (SP
و في البرمجة العشوائية يتم وصف مؤشر أو أكثر من مؤشرات النموذج باستخدام متغيرات عشوائية -احتمالية-، ومن الطريق المعروفة للحل طريقة البرمجة العشوائية المقيدة Chance Continues Programming حيث تقدر

القيم المتوقعة لدالة الهدف ومعاملات متغيرات القرار من القيود الهيكلية أو الطرف الأيمن لها أو كليهما كمتغيرات عشوائية ذات توزيعات احتمالية معينة.

7 - البرمجة الديناميكية (DP) (Dynamic Programming)

وهي عندما يكون المطلوب هو التوصل إلى حلول متعلقة ببعضها البعض وفي فترات متغيرة و متعاقبة ويكون الغرض من دالة الهدف هو أمثلية هذه الأهداف على الفترات المختلفة بأكملها.

البرمجة الخطية (Linear Programming)

طبيعة البرمجة الخطية:

يعتبر اتخاذ القرار الأمثل في إدارة الأعمال الحديثة أهم وظيفة للمدير. هذا القرار دائماً يكون عبارة عن اختيار بديل من عدة بدائل للوصول إلى أهداف معينة. هذه الأهداف قد تكون شيئاً يراد تعظيمه أو شيئاً يراد خفضه أو مزيج من الاثنين. و من الأمثلة على الأشياء التي يراد تعظيمها: تعظيم الأرباح، الدخل، الاستثمار، مستوى خدمة العملاء وغيرها من الأشياء التي في صالح الشركة.ومن الأمثلة على الأشياء التي يراد تخفيضها:تخفيض الخسائر، الأخطار، الموارد المستخدمة وجميع الأشياء التي في غير صالح المنشأة. لذلك فإن البرمجة الرياضية تهدف إلى معرفة قيم بعض المتغيرات التي تؤدي إلى أمثلية الهدف(أو الأهداف) المطلوب تحقيقها.

ومعظم مشاكل البرامج الخطية يمكن أن تصاغ بالصياغة العامة التالية:

$$(Maximization) \quad or \quad (Minimization) \quad z = \sum_{j=1}^{n} cj \quad xj$$

Subject to:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \quad \lesseqgtr \quad b_i \quad for \quad i = 1,2,\dots\dots\dots,m$$

$$X_j \geq 0 \quad for \quad j = 1,2,\dots\dots\dots,n$$

حيث

Z: قيمة دالة الهدف والتي تقيس فعالية أو كفاءة قرار الاختيار.

X_j: المتغيرات التي يراد معرفة قيمتها.

C_j: تكلفة (أو ربح) الوحدة الواحدة من المتغيرات.

a_{ij}: معاملات المتغيرات وتكون عادةً معروفة.

b_i: المتاح من الموارد والتي تكون محدودة.

ويلاحظ أن البرنامج الرياضي يتكون من ثلاث عناصر رئيسية وهي

1- متغيرات القرار و المؤشرات (Decision Variables and Parameters)

و يمكن تعريف المتغيرات على أنها هي الكميات غير المعروفة التي يحددها الحل و تخضع لإرادة متخذ القرار مثل تحديد الكميات المطلوب إنتاجها من منتجات مختلفة ينتجها المصنع أو تحديد الكميات المطلوب نقلها من المصانع إلى الأسواق. بينما الثوابت أو المؤشرات فيمكن تعريفها بأنها هي الكميات المعروفة الثابتة التي بناء عليها يتم عليها تحديد المتغيرات مثل الكميات المتاحة من كل مورد أو الكمية المستخدمة من مورد معين لإنتاج وحدة واحدة من منتج ما أو معدل الربح أو تكلفة منتج معين.......الخ

2 – القيود (Constraints)

وهي تمثل المحددات التي تحصر قيم المتغيرات المجهولة وحصرها في حدود قيم معينة تسمى الحلول الممكنة Feasible Values.

3- دالة الهدف (Object Function)

وهي الدالة التي يتم فيها صياغة الهدف الذي يسعى إليه متخذ القرار حيث يتم التعبير عن فعالية النموذج كدالة في متغيرات القرار وعموما ينتج الحل الأمثل (Optimal Solution) عندما تحقق قيم متغيرات القرار أفضل قيمة لدالة الهدف سواء كانت الهدف تعظيم كتعظيم الأرباح أو تقليل كتقليل الخسائر والتكاليف وذلك طبقا لظروف الموقف التي يعبر عنها بواسطة القيود وتطبيق البرمجة الخطية.

البرمجة الخطية (Liner Programming)

مثال: تقوم شركة الاويسط للأثاث بتصنيع الطاولات والكراسي كجزء من إنتاجها. الجدول التالي يوضح أسم المورد (المواد والعمل) الذي نحتاجه لصنع وحدة واحدة من المنتج وعدد الوحدات المطلوبة و الوحدات المتاحة.

	الوحدات المطلوبة لإنتاج وحدة واحدة		
أسم المورد	الطاولات	الكراسي	المتاح
خشب (ياردة)	15	10	300
عمل (ساعة عمل)	2.5	5	110
ربح الوحدة الواحدة بالريال	3	4	

و يريد صاحب الشركة أن ينتج العدد اللازم من الكراسي و الطاولات لزيادة الربح إلى اكبر قدر ممكن من الريالات.

خطوات الحل:

1 صياغة المشكلة رياضياً (Formulation)

نفترض إن عدد الطاولات المطلوب إنتاجها (t) وعدد الكراسي المطلوب إنتاجها (c)

صياغة دالة الهدف (Objective function):

حيث أن الهدف هو تعظيم الربح إلى أعلى حد ممكن فإن دالة الهدف يجب أن تكون تعظيم (Maximization) و اختصارا تكتب (.Max)[1] وحيث أن الربح هو عبارة عن عدد الوحدات المباعة مضروبا بربح الوحدة الواحدة فإن دالة الهدف في هذه المشكلة تكون كالتالي:

Max. $3t + 4c$

و يمكن أن يرمز لدالة الهدف برمز وليكن (z) فتكتب أيضا بصوره أخرى كالآتي:

Max. $z = 3t + 4c$

صياغة القيود (Constraints)

- قيد الخشب:

الأخشاب المستخدمة لصنع الطاولات + الأخشاب المستخدمة لصنع الكراسي محددة ويجب أن لا تزيد عن الكمية المتاحة. لذلك فإن القيد الخاص بالكمية المتاحة من الأخشاب يكون كالتالي:-

$15t + 10c \leq 300$

- قيد العمل

ساعات العمل المستخدمة لصنع للطاولات + ساعات العمل المستخدمة لصنع الكراسي يجب أن لا تتعدى الساعات المتاحة للشركة. أي أن:-

$2.5t + 5c \leq 110$

- قيد عدم السلبية(non-negative constraints)

حيث أنه لا يوجد إنتاج كراسي أو طاولات بالسالب فإنه يجب أن يوضع قيد على الحل أن لا يقل عن الصفر. أي أن

$t , c \geq 0$

لصياغة المشكلة بالبرمجة الرياضية (البرمجة الخطية) توضع المتغيرات t , c و دالة الهدف و القيود الخاصة بالمشكلة جميعا. لذلك فإن صياغة المشكلة السابقة كاملة هي كالآتي:

$$\text{Max. } z = 3t + 4c$$

subject to

$$15t + 10c \leq 300$$

$$2.5t + 5c \leq 110$$

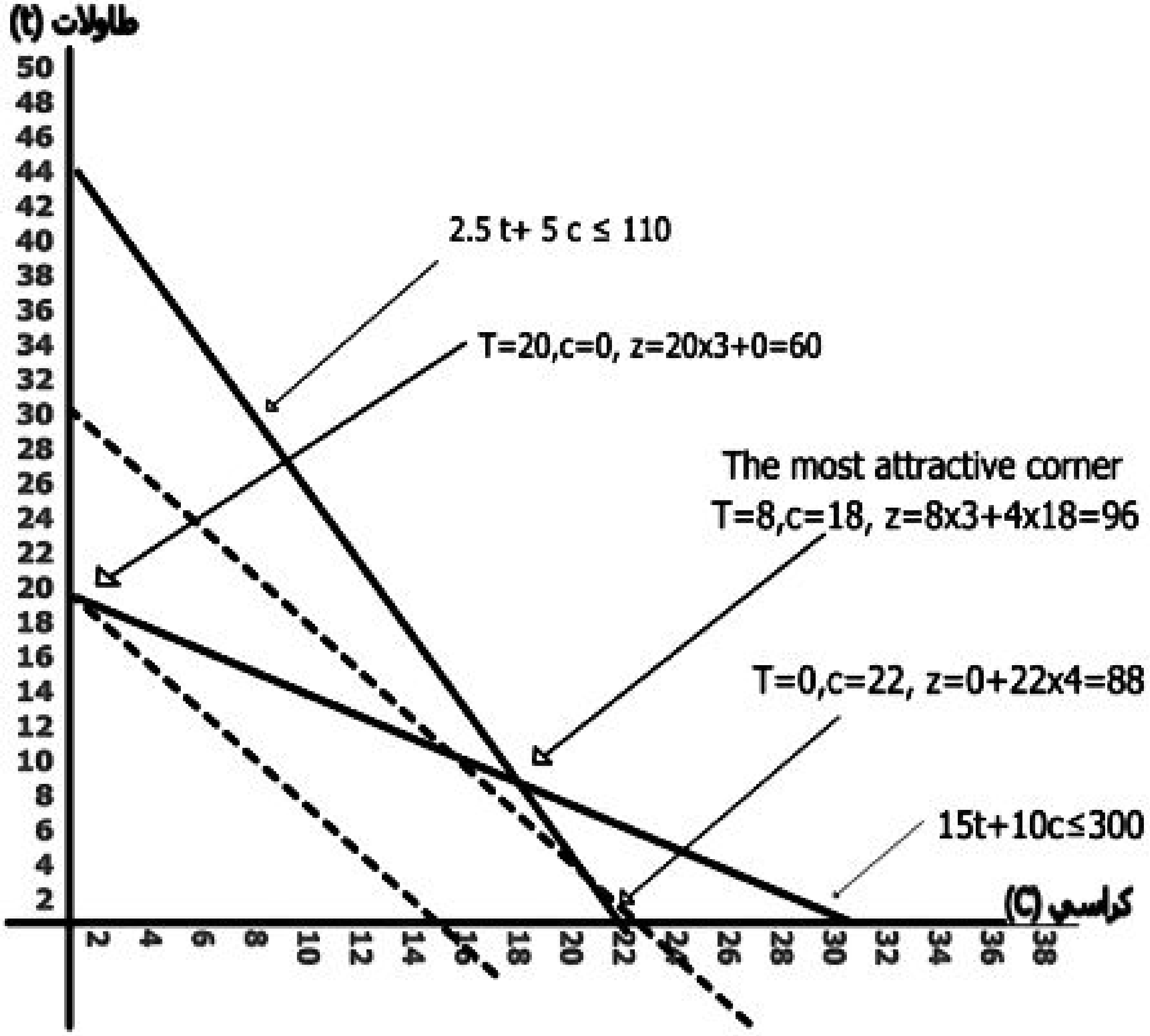
$$t , c \geq 0$$

2- طريقة الحل البياني (The graphical solution methods)

طريقة الحل البيانية هي أسهل من الطرق الأخرى لحل المشكلة ولكن يعيبها أنها مقتصرة على حل المشاكل التي تتكون من متغيرين فقط (مثلا منتجين) كما هو الحال في هذا المثال.

لرسم مجال الحل الممكن (feasible solution)

نبدأ الرسم بوضع محورين (خطين) متعامدين. أحد هذه المحاور يمثل عدد الطاولات و الآخر يمثل عدد الكراسي. يقسم كل محور إلى وحدات لا تقل عن الحد الأعلى الممكن إنتاجه من كل منتج. و يرسم كل قيد و كذلك دالة الهدف على شكل خط كالآتي:



طريقة السمبلكس للبرمجة الخطية (The Simplex Method in Linear Programming)

طوّر هذه الطريقة العالم (George Dantzing) بعد الحرب العالمية الثانية في عام 1947. و هي طريقة مفيدة في حل مشاكل البرمجة الخطية الكبيرة(ذات الموارد غير السالبة) حيث يمكن أن يستخدم الكمبيوتر ليقوم بحل المشاكل الكبيرة بسهولة.

لفهم طريقة السمبلكس فإننا سنحاول حل المثال المبسط السابق (شركة الأويسط) بطريقة السمبلكس خطوة بخطوة. حيث افترضنا أن عدد الكراسي المراد إنتاجها هو(c) وعدد الطاولات المراد إنتاجها أيضا هي (t) و كانت صياغة المشكلة هي كالتالي:-

Max. $z = 3t + 4c$

subject to:

$15t + 10c \leq 300$

$2.5t + 5c \leq 110$

$t , c \geq 0$

و بوضعها في جدول:

	عدد الوحدات المطلوبة لإنتاج وحدة واحدة من		
اسم المورد	الطاولات	الكراسي	المتاح
خشب (ياردة)	15	10	300
عمل (ساعة عمل)	2.5	5	110
ربح الوحدة الواحدة بالريال	3	4	

المتغيرات الفائضة (Slack variables)

أول خطوة لحل المشكلة بطريقة السمبلكس هو حلها جبريا لمعرفة الفوائض في الموارد المتاحة من خشب و ساعات عمل. نسمي العدد المطلوب إنتاجه من الكراسي (c) وعدد الطاولات المراد إنتاجها (t) بالمتغيرات الأساسية ونسمي الكمية الفائضة أو الزائدة من الخشب و من ساعات العمل بالمتغيرات الفائضة (Slack Variables). أي أنه من الممكن أن نضع القيود بصورة جديدة بعد إضافة المتغيرات الفائضة كالتالي:-

كمية الخشب المستخدم + كمية الخشب غير المستخدم (الفائض)= الكمية الخشب الإجمالية.

عدد الساعات المستخدمة + عدد الساعات غير المستخدمة (الفائضة)= عدد الساعات الإجمالية.

أفترض أننا رمزنا لكمية الخشب غير المستخدم (الفائض) بالرمز (s1) و رمزنا لعدد الساعات غيرا لمستخدمة (الفائضة) بالرمز (s2) فإن القيود يمكن الآن كتابتها كالآتي:-

$$15\,t + 10c + (s1) = 300$$
$$2.5\,t + 5c + (s2) = 110$$

هنا نلاحظ إن القيود على شكل يساوي لأننا جمعنا المستخدم وغير المستخدم من الموارد المتاحة

و بوضعها بالشكل السابق يخدمنا في غرضين. الأول هو لسهولة حلها جبريا إذا كانت متساوية بدلا من متراجحة. الثاني هو لسهولة تفسيرها اقتصاديا إذا كانت على هذا الشكل.

وضع المشكلة الخطية في شكل فوائض:

يتم وضع المشكلة الخطية السابقة في شكل فوائض بإدخال المتغيرات الفائضة على صياغة المشكلة الخطية السابقة كالآتي:

$$\text{Max } z = 3t + 4c + (0)s1 + (0)s2$$

subject to:

$$15\,t + 10c + (1)s1 + (0)s2 = 300$$
$$2.5\,t + 5c + (0)s1 + (1)s2 = 110$$
$$t, c, s1, s2 \geq 0$$

هذه المتغيرات الفائضة ظهرت في دالة الهدف بمعاملات صفرية لتعكس الحقيقة بأن الموارد غير المستخدمة لا تزيد في الربح (أو حتى الخسارة) ولكن تجلس في مستودع الشركة. و وضعت المتغيرات الفائضة في القيود حتى يتم حسابها لاحقا بشكل منظم. أيضا فإن المتغيرات الفائضة يجب أن تكون موجبة القيمة أو أصفارا ويستحيل وجودها بالسالب لأن و جودها بالسالب معناه أنك استخدمت من الموارد أكثر مما عندك و هذا مستحيل.

حل المشكلة الخطية جبريا

لا يمكن الآن رسم منطقة الحلول الممكنة بيانيا وذلك لأنه يوجد عندنا أربعة متغيرات بدلا من اثنين. و لا يمكن حل المشكلة لأنها صارت ذات أربعة أبعاد و كذلك هي معادلتين في أربعة مجاهيل.

$$15\,t + 10c + (1)s1 + (0)s2 = 300$$
$$2.5\,t + 5c + (0)s1 + (1)s2 = 110$$

و الخلاصة هي أنه متى ما زاد عدد المجاهيل (المتغيرات) عن عدد المعادلات فإنه لحل هذه المعادلات يجب افتراض قيم ابتدائية للمتغيرات الزائدة.

استخدام طريقة السمبلكس في الحل The Simplex Method

تبدأ طريقة السمبلكس بالزاوية التي تكون كمية الإنتاج فيها صفرا (أي نقطة تقاطع المحورين) حيث تكون متغيرات الحل" تشكيلة الحل" هي المتغيرات الفائضة. بعد ذلك تنتقل إلى زاوية أخرى تعظم دالة الهدف بأعظم قيمة ممكنة في كل مرحلة. و عندما يستحيل زيادة الأرباح فإن ذلك يعني الوصول إلى الزاوية الأعظم جاذبية (المثلى).

خطوات الحل بطريقة السمبلكس The Simplex Method

1 -صياغة المشكلة الخطية Formulate the linear program

بعد إضافة المتغيرات الفائضة واستبدال المتراجحات (علامة الأكبر من و الأصغر من) بمتساويات. تكون صياغة المشكلة هي كما يلي:

$$z = 3t + 4c + (0)s1 + (0)s2$$

$$15t + 10c + (1)s1 + (0)s2 = 300$$

$$2.5t + 5c + (0)s1 + (1)s2 = 110$$

وبالنظر إلى صياغة المشكلة السابقة نجد أنها تتكون من ثلاث قيود: القيد الأول خاص بدالة الهدف. القيد الثاني خاص بالمتراجحة الأولى (قيد الخشب). القيد الثالث خاص بالمتراجحة الثانية (قيد العمل). وهذه القيود تحقق شروط الصورة المقننة (The Canonical Form) التي بناء عليها يتم بناء جدول السمبلكس وهي:

- إن كل معادلة تقابل متغيرا أساسيا واحدا معامله يساوي الواحد الصحيح (S1, S2).
- إن كل متغير أساسي يظهر في معادلة واحدة فقط ولا يظهر أيا منهما في دالة الهدف.

2- بناء جدول السمبلكس الابتدائي The initial simplex tableau

ربحية الوحدة الواحدة unit profit		3	4	0	0	عمود	
	المتغيرات غير الأساسية / المتغيرات الأساسية	t	c	s1	s2	الحل	exchange ratio معدل التغيير
0	s1	15	10	1	0	300	=300÷30=10
0	s2	2.5	5	0	1	110	=110÷5=22*
unit sacrifice row	تضحية الوحدة الواحدة	0	0	0	0	0 الربح الحالي	
Improvement row	كسب الوحدة الواحدة	3	*4	0	0		

مع العلم بأن تضحية الوحدة الواحدة =ربحية الوحدة الواحدة × عمود معامل التغيير

لذلك فإن وحدة التضحية لكل متغير غير أساسي يكون كالتالي:

t	c	s1	s2
0× 15	0×10	0× 1	0×0
0×2.5	0×5	0×0	0×1

تضحية الوحدة الواحدة	0	0	0	0

و حيث أن ربحية الوحدة الواحدة للمتغيرات الأساسية الآن تساوي الصفر فإن جميع نتائج وحدات التضحية أيضا تساوي أصفارا. وهذا يدل على أننا سنتنازل عن لاشيء إذا أدخلنا أي متغير جديد في الحل.

كذلك فإن كسب الوحدة الواحدة = ربحية الوحدة الواحدة - تضحية الوحدة الواحدة

ربحية الوحدة الواحدةunit profit	3	4	0	0
(-) تضحية الوحدة الواحدة	0	0	0	0
كسب الوحدة الواحدة(=) Improvement row	3	4	0	0

إيجاد المتغير الداخل و الخارج

بالنظر إلى كسب الوحدة الواحدة من الجدول السابق نجد أن اكبر قيمة مكتسبة ستكون بدخول المتغير c و هي 4. لذلك فإن العمود الداخل فهو التالي:

c
*4

ولتحديد المتغير الخارج (الصف) فإنه يتم قسمة قيم عمود الحل على معاملات العمود الداخل.

=300÷30=10	300	0	1	10	15
=110÷5=22*	110	1	0	5	2.5

فيكون المتغير الخارج هو الصف الذي يحوي أقل معاملات موجبة [1](22) كما يلي:

=110÷5=22*	110	1	0	5	2.5	s2

بناء جدول من جديد:

لبناء جدول جديد فإن معادلات المتغيرات الأساسية ستكون كالتالي:

15 t + 10 c +(1)s1+(0)s2 = 300

2.5 t + 5 c + (0)s1+(1)s2 = 110 (المتغير الخارج)

بما أن المتغير الداخل هو c و الخارج هوs2 فإننا سنغير المعادلة الثانية بحيث أن معامل c في المعادلة العمل (المتغير الخارج) يجب أن يكون واحدا صحيحا.
أي بقسمة المعادلة الثانية على 5 كالتالي:

0.5 t + 1 c + (0)s1+(1/5)s2 = 22(المتغير الجديد)

لذلك فإنه إذا وضعت قيمة t وكذلك s2 تساوي أصفارا فإن c ستساوي 22 و تكون المعادلتين السابقتين كما يلي:-

15 t + 10 c +(1)s1+(0)s2 = 300

0.5 t + 1 c + (0)s1+(1/5)s2 = 22 (الصف الثاني الجديد)

وحيث أن معامل c يساوي الواحد الصحيح في المتغير الجديد(الثاني) و 10 في المتغير(الصف) الأول، فإنه بضرب المعادلة (الصف) الثاني في - 10 و أضافتها إلى الصف الأول، فإن نتيجة الحد الثاني (c) ستكون بعد جمع المعادلتين تساوي صفرا كما يلي:-

15 t + 10 c +(1)s1+(0)s2 = 300
-5 t - 10 c - (0)s1-(2)s2 = -220
----
10 t + 0 c +(1)s1-(2)s2 = 80

هذا الصف الجديد هو صف s1 (الكمية الفائضة من الخشب) و هذا يؤكد هذه الحقيقة عندما s2 و t (وهما المتغيرات غير الداخلة في الحل (nonmix variables) يساويان صفرا. حيث يكون

0 t + 0 c +(1)s1-(0)s2 = 80

s1=80

أو بعبارة أخرى في القيد:

15 t + 10 c +(1)s1+(0)s2 = 300

إذا كانت قيمة c=22 وكانت قيمة t=0 فإن 80 ياردة من الخشب ستظل غير مستخدمة. الصفين الجديدين هما كما يلي:-

10 t + 0 c +(1)s1-(2)s2 = 80

0.5 t + 1 c + (0)s1+(1/5)s2 = 22

بناء جدول السمبلكس الثاني:

	ربحية الوحدة الواحدة unit profit	3	4	0	0	عمود	
دالة الهدف	المتغيرات غير الأساسية / المتغيرات الأساسية	t	c	s1	s2	الحل Solution values	exchange ratio معدل التغيير
		Exchange coefficient					
0	s1	10	0	1	-2	80	8*
4	c	1/2	1	0	1/5	22	44
unit sacrifice row	تضحية الوحدة الواحدة	2	4	0	4/5	88 الربح الحالي	
Improvement row	كسب الوحدة الواحدة	1*	0	0	-4/5		

بناء جدول السمبلكس الثالث:

	ربحية الوحدة الواحدة unit profit	3	4	0	0	عمود	
دالة الهدف	المتغيرات غير الأساسية / المتغيرات الأساسية	t	c	s1	s2	الحل Solution values	exchange ratio معدل التغيير
		Exchange coefficient					
3	t	1	0	1/10	-0.2	8	
4	c	0	1	-1/20	0.3	18	
unit sacrifice row	تضحية الوحدة الواحدة	3	4	0.1	0.6	96 الربح الحالي	
Improve ment row	كسب الوحدة الواحدة	0	0	-0.1	-0.6	بما انه لا يوجد في جميع عناصر كسب الوحدة الواحدة أي عددا موجبا فإن ليس ممكن زيادة الأرباح عن هذا المقدار	

مع العلم إننا حصلنا على عناصر الصف الأول بقسمة جميع العناصر على 10 كما حصلنا على عنا صر الصف الثاني كما يلي:

العنصر الجديد= العنصر القديم - (العنصر المجاور في العمود الدليل(ثابت)× العنصر الجديد في الصف الخارج (الأول))

فمثلا

0=1/2-1/2(1)

1=1-1/2(0)

-1/2= 0- ½(1/10)

0.45= 1/5-1/2(-2)

18= 22-1/2(8)

خطوات حساب جدول السمبلكس(Simplex Tableau)

تعتمد طريقة حساب جدول السمبلكس في حالة التعظيم على الخطوات التالية:

1 - الابتداء من نقطة الصفر (0,0) كحل أساسي ممكن وهي التي تقابل الزاوية A في الرسم البياني السابق.

2 - فحص معاملات المتغيرات في دالة الهدف وتحديد مدى إمكانية وجود متغير غير أساسي و يؤدي زيادته إلى أعظم قيمة في دالة الهدف؟ إذا لم يوجد فنتوقف عند هذا الحد ونكون قد توصلنا إلى الحل الأمثل. أما إذا و جد هذا المتغير غير الأساسي فيكون هو المتغير الداخل (Entering Variable) و ننتقل إلى الخطوة التالية.

3 - نزيد من قيمة هذا المتغير الداخل حتى تصل قيم احد المتغيرات الأساسية إلى الصفر وبذلك يكون هذا المتغير الأساسي هو المتغير الخارج (Departing Variable). ثم يضمّ المتغير الداخل إلى قائمة المتغيرات الأساسية و المتغير الخارج إلى المتغيرات غير الأساسية.

4 - حساب قيم المتغيرات و دالة الهدف ثم الانتقال إلى الخطوة 2.

تحليل الحساسية في البرنامج الخطي (Sensitivity Analysis in Linear Programming)

الحل الأمثل باستخدام السمبلكس هو حل للمشكلة الخطية بمعالمها الحالية المعطاة أي ربح الوحدة الواحدة و تكلفة الوحدة الواحدة و المعاملات الأخرى مثل قيم الجهة اليمنى للقيود وغيرها. ولكن أي اختلاف أو تغيير في تلك المعاملات سيؤدي بالضرورة إلى تغير في الحل الأمثل. إذا فالمهم إيجاد وسيلة لمعرفة اثر التغيرات في المعطيات و المعاملات على الحل الأمثل ومن الممكن لفكرة البرمجة الخطية أن تطور لتقدير وحساب اثر هذه التغيرات. هذا التطوير و الإضافة لطريقة السمبلكس السابقة يعرف بتحليل الحساسية (Sensitivity Analysis) و لذلك فمهمة تحليل الحساسية هو معرفة تأثير هذه التغيرات البسيطة في المعاملات (Coefficients) أو في الكميات المتاحة. ودرجة حساسية الحل الأمثل الناتجة للتغير في هذه المعاملات قد يتراوح بين عدم التغيير في الناتج النهائي للحل الأمثل إلى تغيرات واضحة وقوية.

هذا الأمر مرتبط بأمر آخر إلا وهو شكل النموذج الخطي نفسه. مثلا نحن قد نهتم بمعرفة التغير في كمية الموارد المتاحة أو كيف سيؤثر اختيار منتج جديد ضمن الحلول المثلى على الحل الأمثل.

1 -تحليل الحساسية لمعاملات الجهة اليمنى (Sensitivity Analysis for Right-hand-side values)

لأجل التوضيح اعتبر أننا استخدمنا مشكلة شركة الأويسط السابقة. افترض أنه حدث نقص في عدد عمال الشركة مما أدى إلى تقليل الساعات المتاحة. لذلك فالسؤال عند هذه الحالة هو ماذا يمكن أن يحدث للحل الأمثل؟ طبعا إذا كان التغير بسيطا فإن الحل الأمثل قد لا يتغير و بذلك فإن الزاوية المثلى ستظل كما هي ولكن التغير في كمية هذه الموارد المتاحة قد يغير الزاوية المثلى كليا أحيانا. لذلك فإننا يجب أن نسأل أيضا السؤال التالي: إلى أي مدى من الممكن أن نغير في كميات الموارد المتاحة " الطرف الأيمن" بدون أن تؤدي هذه التغيرات إلى أي تغير في الحلول المثلى الحالية " Variables mix"

لمعرفة مثلا الكمية الممكنة إضافتها أو إنقاصها من الخشب فإننا يجب أن ننظر إلى الكمية غير المستخدمة (Slack variable) من الخشب "s1".

إذا زيد ت "s1" كمية الخشب غير المستخدم" فإن كمية الخشب المستخدمة لعمل الطاولات و الكراسي ستقل وبالتالي تتغير الكمية المنتجة من الطاولات و الكراسي. إلى أي حد أو مدى ممكن إنقاص الخشب بدون أن تؤدي هذه التغيرات إلي تغيرات في الحلول المثلى الحالية (Variables)

mix ؟ أي نفس السؤال لو قلنا إلى أي كمية يمكن زيادة الفائض من الخشب بدون أن تؤدي هذه الزيادات إلي تغيرات في الحلول المثلى الحالية (Variables mix)؟
باعتبار s1 كمتغير جديد داخل في جدول السمبلكس فإن ذلك سيخبرنا عن الإجابة. بفحص معامل التغير (Exchange Coefficient) الخاص بالخشب المستخدم و غير المستخدم(الرجاء النظر إلي الجدول النهائي للسمبلكس) فإننا نلاحظ أنه يجب أن نتخلى عن (1/10) أي (0.10) من الطاولة لكل زيادة في s1 بوحدة واحدة. و هذا يعطي للعمال وقت إضافي لعمل (1\-20) أي (-0.05) من عمل كرسي وذلك لان الرقم الذي في عمود s1 و c هو (-0.05).
كلما نزيد s1 " أي لا نستخدم خشب لعمل الطاولات" فإننا في النهاية سنتخلص من الطاولات. وبما أن الطاولات المثلى التي ستنتج هي 8 طاولات فإننا ممكن تحويل هذه ال 8 طاولات إلى 80 لوحا من الخشب (أي 8 ÷ (0.10) = 8 × 10 = 80) غير مستخدما. لو خفضت الكمية غير المستخدمة إلى اقل من 80 لوحا فإن معنى ذلك أنه سيظل عندنا كمية من الخشب غير المستخدم لعمل طاولات أو بعض الطاولة و هذا سيجعلنا ننتج على الأقل جزاء من الطاولة أو أكثر وذلك حسب الكمية غير المستخدمة من الألواح.
ولكن إذا أخذنا 80 لوحا على الأقل فإننا لن نستطيع إنتاج هذه الطاولات و الزيادة عن 80 لوح سيؤثر أيضا على إنتاج الكراسي.
وفي المقابل ماذا سيحصل إذا تمت زيادة الكمية المتاحة من الخشب ؟ إلى أي درجة ممكن أن نزيد من الخشب وستظل الشركة تنتج الطاولات و الكراسي جميعا ؟ زيادة الخشب هي مناظرة لإعارة خشب جديد أو الحصول على فائض من الخشب و بالنظر على أن زيادة الخشب " أو الحصول على فائض من الخشب" هي عبارة عن فائض سالب. أي بإمكاننا تخفيض " غير المستخدم من الخشب" إلى كمية سالبة " بالرغم أنه يفترض أنه لا يوجد كميات سالبة في السمبلكس و لكن للتوضيح فقط" وهو نفس المعنى إذا تمت زيادة الكمية.
تفسير معامل التغير "Exchange coefficient " يكون بالعكس إذا كان المتغير الداخل منقوص معامل التغير للفائض من الخشب "s1" يخبرنا أن الشركة بالإمكان الحصول على (0.10) من الطاولة و كذلك (-0.05) من الكرسي " أي إعطاء (-0.05) لكرسي.
لذلك فكل الـ 18 كرسي بالإمكان أن يستبدلوا إذا وجد عجز أو نقص في الخشب غير المستخدم بما يعادل 18 × 20 = 360 قدم من الألواح. وبكلمات أخرى فإن الكمية المتاحة من الألواح ممكن أن تزيد إلى حد 360 قدم من الألواح زيادة على 300 الأصلية و جعل الكمية الجديدة = 300+360 = 660.

والى هذا الحد ستظل الشركة تنتج طاولات وكراسي وهي تعمل أرباح وأي زيادة في الخشب عن هذا الحد ستؤدي إلى عدم خروج الكراسي من الحل الأمثل وبالتالي عدم وقف إنتاج الكراسي.

لتحليل حساسية الكمية المتاحة من الأخشاب نقول أن الشركة ستظل تنتج طاولات وكراسي وستكون مربحة ما دامت بين الحدين التاليين:
الحد الأدنى: 300 - 80 =220
الحد الأعلى = 300 + 360 = 660
أي بين (220 - 660).
وهذا ما كان يرى من الجداول التالية:

تأثير زيادة أو تخفيض الخشب عن الكمية المتاحة الأصلية

يمكن التوصل إلى الحل السابق بسهولة بالنظر إلى جدول السمبلكس النهائي:

مجال تغير كمية الخشب المتاحة مع الإبقاء على متغيرات الحل الأمثل			
exchange ratio معدل التغيير	الحل Solution values	s1 Exchange coefficient	المتغيرات الأساسية
8÷(10\1) =80	8	1/10	t
18÷(-1\20) = -360	18	-1/20	c
الحد الأدنى = 300 - 80 = 220 لوح من الخشب الحد الأعلى = 300 + | 360| = 660 لوح من الخشب			

تأثير زيادة أو تخفيض العمل عن الكمية المتاحة الأصلية

مجال تغير كمية العمل المتاحة مع الإبقاء على متغيرات الحل الأمثل			
exchange ratio معدل التغيير	الحل Solution values	s2 Exchange coefficient	المتغيرات الأساسية
8÷(-0.2)= -40	8	-0.2	t
18÷(.3)= 60	18	0.3	c
الحد الأعلى = 110 + |40| = 150 ساعة عمل الحد الأدنى = 110 - 60 = 50 ساعة عمل			

المدى والذي حصلنا عليه بالطريقة السابقة ينطبق طالما الكميات المتاحة من الموارد الأخرى في القيود الأخرى لم تتغير
إذا وجد متغير فائض "Slack variable " مع المتغيرات الأساسية في جدول السمبلكس الأخير فإن الحد الأدنى و الأعلى للتغير في الكميات المتاحة من الموارد كما يلي:
الحد الأدنى = الكمية المتاحة الأصلية - قيمة الحل للمتغير الفائض
الحد الأعلى = ∞
والمنطق وراء الحد الأدنى ذلك هو أنه لم تستخدم الموارد المتاحة في الحل الأمثل لذلك بإمكاننا تخفيض هذه الموارد إلى اقل من هذا الحد الفائض ولن يتغير المتغيرات الأساسية الحل الأمثل. ولكن أي زيادة عن ذلك المقدار ستغير المتغيرات الأساسية في الحل الأمثل.
وحيث أن الكمية المتاحة من الموارد لم تستخدم فإن أي زيادة فيها لن تؤثر على المتغيرات الأساسية في الحل الأمثل ولكن ستؤثر على الفائض فقط.
الجهة اليمنى (الكميات المتاحة) للقيود من النوع " ≥ "
في الفقرة السابقة قد ذكرنا الحالة التي تكون عندها القيود من النوع " ≤ ". وهنا نناقش حالة أخرى إلا وهي عندما تكون القيود من النوع " ≥ ".
نفس الطريقة تطبق في مثل هذه الحالة ولكن المتغيرات الزائدة تستخدم لمعرفة الحدود الدنيا والعليا للقيود التي على شكل اكبر من أو يساوي.
معدل التغير يجب أن يفسر بالعكس لان المتغيرات الزائدة عادة تطرح ولا تجمع كالمتغير الفائض.
عندما يكون المتغير الزائد غير موجود ضمن المتغيرات الأساسية في الحل الأمثل:
الحد الأدنى = الكمية المتاحة الأصلية -أقل قيمة مطلقة للمعدلات السالبة

أو =∞- إذا " لم يوجد معدل سالب"
الحد الأعلى = الكمية المتاحة الأصلية + اقل قيمة للمعدلات الموجبة
أو = ∞ " إذا لم يوجد معدل موجب"
عندما يكون المتغير ا لزائد موجود ضمن المتغيرات الأساسية:
الحد الأدنى= - ∞
الحد الأعلى = الكمية المتاحة + قيمة الحل للمتغير الزائد
القيود من النوعية " ="
في هذه الحالة فإن النموذج يجب أن يحتوي على متغير صناعي. المتغير الصناعي هنا هو مناظر للمتغير الفائض في تحليل الحساسية. كل شي هو كما هو في حالة المتغير الفائض ماعدا حالة أن يكون فيها المتغير الصناعي ضمن المتغيرات الأساسية والتي يجب أن تعتبر لان المتغيرات الصناعية للقيود التي على شكل يساوي هي التي فقط تستخدم في تحليل الحساسية. وجميع أعمدة المتغيرات الصناعية الأخرى للقيود على الأشكال الأخرى يفضل أن تبعد من الحل من البداية.
تحليل الحساسية للقيود اليمنى" الكميات المتاحة" من الممكن أن تطبق في عامة أشكال البرمجة الخطية، بغض النظر عن ما إذا كانت المشكلة تعظيم أو تصغير.

الحل عند وجود تغير في الجهة اليمنى لأحد القيود

عند التغير في الجهة اليمنى لأحد القيود فإنه من الممكن إيجاد الحل الأمثل بطريقة السمبلكس منذ البداية. ولكن بعمل قليل بالإمكان تعديل الحل الأصلي الأمثل طالما التغيير في الجهة اليمنى هذه يقع بين الحدين الذين تم التوصل أليهما سابقا.
في هذه الحالة فإن القيمة الجديدة للمتغير الأساسي = القيمة الأصلية + (معامل التغير × صافي التغير في الجهة اليمنى)
صافي التغير في الجهة اليمنى = القيمة الجديدة للطرف الأيمن - القيمة الأصلية للطرف الأيمن
مثال ذلك افترض أننا في مثال شركة الطالعية سنزيد المتاح من الخشب إلى 400 لوح من الخشب بدلا من 300 فما هي الكميات و القيم المثلى الجديدة؟
أولا: المتغيرات الأساسية:
الطاولات = 8 + (1\10× (400-300) = 8 + (10) = 18
الكراسي = 18 + (- 1\20 × (400-300) = 18 - 5 = 13
ومما يجدر ذكره هو أننا استخدمنا هنا معامل التغير لعمود s1

ثانيا: الربح الجديد

$$= 3\times 18 + 4\times 13 = 754$$

افترض أن ساعات العمل قد انخفض من 110 إلى 90. ما هو تأثيرها ؟

الحل الجديد سيتم باستخدام معاملات المتغير الفائض لعنصر العمل s2.

المتغيرات الأساسية

الطاولات = 8 + (-1\2)(110-90) = 8 + 10 = 18

الكراسي = 18 + (.45) (110-90) = 18 + 9 = 9

الربح الجديد= 18 × 3 + 9 × 4 = 252

وفي حالة أن الجهة اليمنى لأي من هذه القيود يوجد له متغير ضمن المتغيرات الأساسية فإن اي زيادة أو نقصان في ذلك المورد سيجعل المتغير الفائض يزيد أو ينقص بمقدار صافي التغير في الجهة اليمنى (القيمة الجديدة - القيمة القديمة). وجميع قيمة المتغيرات الأخرى و الأرباح ستظل ثابتة كما كانت. ولكن عندما يحدث تغير في أي جهة يمنى من هذه القيود خارج المدى (خارج نطاق الحد الأدنى و الأعلى) فإن المشكلة ستكون أصعب. وقد يكون حلها من البداية أسهل من حلها من جدول السمبلكس النهائي للمشكلة الأصلية.

3-1 مفهوم المشكلة الثنائيـة: The Concept of Duality Problem

إن لكل نموذج مـن نمـاذج البرمجـة الخطيـة نموذجـاً مقـابلاً (ثنائيـاً) يسـمى أحـد النمـوذجين بالنموذج الأولي Primal model، بينما يطلق على الآخر تسمية النموذج المقابل (الثنائي) Dual model إن من أهم الصفات المشتركة للنموذج الأولي والثنائي. هو إن الحل الأمثل لأحدهما (في حالة وجود حل) يعطي معلومات كاملة عن الحل الأمثل للنموذج الآخر.

تتمثل أهمية الثنائية في مسائل البرمجة الخطية فيما يلي:

1. تقليص الجهد الحسابي المطلوب في تحليل مسألة البرمجة الخطية التي تحتوي على عدد كبير من القيود وهذا له فوائد كبيرة في استخدامات وتطبيقات متعددة.
2. تشير الثنائية في البرمجة الخطية إلى إن كل برنامج خطي مكافئ إلى مباراة بين شخصين ذات مجموع صفري 2- Person Zero Sum game وهذا يؤكد وجود علاقة بين طريقة البرمجة الخطية ونظرية المباراة.

سوف نتطرق إليها عندما نستخدم البرمجة الخطية ونظرية المباراة.

3. بالإمكان الحصول على الحل الأمثل للمسألة الثنائية من جدول الحل الأمثل الأولية مباشرة والعكس صحيح، ولعل من المفيد اختيار المسألة التي تحتوي عدد قليل من القيود. والتي تعتبر ملائمة أكثر للحسابات التكرارية أو بالنسبة للبرامج الجاهزة في الكومبيوتر.
4. إذا كان لأحد متغيرات النموذج الأول قيمة سالبة فإن حل النموذج هذا غير ممكن بينما في حالة النموذج المقابل يمكن إيجاد حل للمشكلة عند وجود متغير ذي قيمة سالبة.

تعريف المشكلة الثنائية Defined Duality Problem

تسمى مسألة البرمجة الخطية متماثلة Symmetric إذا كانت جميع المتغيرات x_j مقيدة بالإشارة. وجميع القيود في صيغة متباينات من نوع أو أقل أو يساوي $\leq$ عندما تكون دالة الهدف من نوع Maximum أو أكبر أو يساوي $\geq$ في حالة أن تكون دالة الهدف من نوع Minimum وفيما يلي توضيح للصيغة العامة لنموذج البرمجة الخطية الأولية والثنائية في حالتها المتماثلة.

1. المسألة الأولية Primal Problem

$$Max\, x_0 = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

$s.to:$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad i = 1,2...m$$

$$x_j \ge 0 \qquad j = 1,2...n$$

2. المسألة الثنائية Dual Problem

$$Min\, y_0 = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$s.to:$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_i \quad j = 1,2...n$$

$$y_i \ge 0 \qquad i = 1,2...,m$$

وباستخدام المصفوفات يمكن إعادة كتابة الصيغتين أعلاه

1. المسألة الأولية

$$MaxZ = cx$$

$s.to:$

$$Ax \le b$$

$$x \ge 0$$

2. المسألة الثنائية

$$\text{Min } w = yb$$

s. to:

$$yA \ge C$$

$$y \ge 0$$

نظرية (1): Theory (1)

إذا كان نموذج البرمجة الخطية الأولية والثنائية المتماثلة كالآتي:

1. إن قيمة دالة الهدف لنموذج البرمجة الأولية من نوع Max لأي حل مقبول تمثل الحد الأدنى للقيمة الصغرى لدالة الهدف في النموذج الثنائي.
2. وبالمثل فإن قيمة دالة الهدف للنموذج الثنائي من نوع Min تمثل الحد الأعلى للقيمة العظمى لدالة الهدف للمسألة الأولية.
3. إذا كان حل المسألة الأولية مقبول وقيمة دالة الهدف غير محدودة (أي إن $Max\ x_0 \to +\infty$). فإن المسألة الثنائية لا يوجد لها حل مقبول.
4. إذا كان حل المسألة الثنائية مقبول وقيمة دالة الهدف غير محدودة ($Min\ y_0 \to -\infty$)، فإن المسألة الأولية لها حل غير مقبول.
5. إذا كان حل النموذج الأولي مقبول، وحل النموذج الثنائي غير مقبول. فإن حل المسألة الأولية يكون غير محدود unbounded.
6. إذا كان حل النموذج الثنائي (dual) مقبول، وحل النموذج الأولي Primal غير مقبول، فإن النموذج الثنائي يكون غير محدود.

مثال (1)

إذا كان النموذج الأولي لمسألة البرمجة الخطية كالآتي:

Ex(1) If the Primary model for LP as the following

$$Max\ z_0 = x_1+2x_2+3x_3+4x_4$$

s. to:

$$x_1+2x_2+2x_3+3x_4 \le 20$$

$$2x_1+x_2+3x_3+2x_4 \le 30$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

وعليه يكون كتابة النموذج الثنائي (dual) كما يلي:

$$Min\ Z_0= 20y_1+30y_2$$

s. to:

$$y_1+2y_2 \ge 1$$

$$2y_1+y_2 \ge 2$$

$$2y_1+3y_2 \geq 3$$
$$3y_1+2y_2 \geq 4$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

بعد تحليل النموذجين باستخدام طريقة السمبلكس Simplex، توصلنا إلى الحلول المقبولة التالية:

للمسألة الأولية

$$x_1=x_2=x_3=x_4= 1$$
$$x_0= cx^0= 10$$

للمسألة الثنائية

$$y_1=y_2= 1$$
$$Y_0=y^0b= 40$$

من هذا يتبين بأن

$$Cx^0 < y^0b$$

وباستخدام النتيجة الأولى والثانية من النظرية السابقة يتضح بأن القيمة الصغرى لدالة الهدف y_0 لا يمكن أن تكون أقل من 10

نظرية (2) Theory (2)

إذا كان هناك حلول مقبولة y^0, x^0 لنماذج البرمجة الخطية الأولية والثنائية المتماثلة، بحيث إن قيم دالة الهدف لكل منها متساوية، فإن هذه الحلول المقبولة وهي الحلول المثلى للمسألة المناظرة.

البرهان:

$$2y_1+3y_2 \geq 3$$
$$3y_1+2y_2 \geq 4$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

بعد تحليل النموذجين باستخدام طريقة السمبلكس Simplex، توصلنا إلى الحلول المقبولة التالية:

للمسألة الأولية

$$x_1=x_2=x_3=x_4= 1$$
$$x_0= cx^0= 10$$

للمسألة الثنائية

$$y_1=y_2= 1$$
$$Y_0=y^0b= 40$$

من هذا يتبين بأن

$$Cx^0 < y^0b$$

وباستخدام النتيجة الأولى والثانية من النظرية السابقة يتضح بأن القيمة الصغرى لدالة الهدف y_0 لا يمكن أن تكون أقل من 10

نظرية (2) Theory (2)

إذا كان هناك حلول مقبولة y^0, x^0 لنماذج البرمجة الخطية الأولية والثنائية المتماثلة، بحيث إن قيم دالة الهدف لكل منها متساوية، فإن هذه الحلول المقبولة وهي الحلول المثلى للمسألة المناظرة.

البرهان:

افرض إن x^0 يمثل أي حل مقبول للمسألة الأولية.

فإن

نظرية (1) $$cx^0 \le y^0 b$$

ولكن بالفرض

$$cx^0 = y^0 b$$

لذا فإن

$cx < cx^0$ لجميع الحلول المقبولة للنموذج الأولي

وعليه فإن من تعريف x^0 (الحل الأمثل للمسألة الأولية) ومن خاصية التماثل نبرهن إن y^0 هو الحل الأمثل للنموذج الثنائي.

نظرية (3): Theory (3)

إذا كانت حلول النموذج الأولي والثنائي مقبولة. فإن لكلاهما حلول مثلى بحيث إن القيم المثلى لدالة الهدف متساوية.

3-2 النموذج الثنائي إذا كان النموذج الأولى بالصيغة القانونية:

Dual Problem when Primal Model is in Canonical Form

من المعلوم، بأن الصيغة القانونية لمسألة البرمجة الخطية هي كالآتي:

$$Max\, Z_0 = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

$$s.to:$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad i = 1,2 \ldots m$$

$$x_j \ge 0 \qquad j = 1,2 \ldots n$$

وعليه فإن النموذج المقابل dual للنموذج الأولي Primal أعلاه كما يلي:

$$Min\ y_0 = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$s.to:$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_i \qquad j = 1,2...n$$

$$y_i \geq 0 \qquad\qquad i = 1,2...,m$$

حيث y_i تمثل متغيرات النموذج المقابل.

إن الصيغة الثنائية الجديدة لها عدد من المتغيرات y_i يساوي عدد القيود في المسألة الأولية.

مثال (2) : اكتب النموذج الثنائي (المقابل) لمسألة البرمجة الخطية التالية

Example (2) Write the Duality model for (LP)

$$Max\ Z_0 = 5x_1 + 6x_2$$

s. to:

$$x_1 + 9x_2 \leq 60 \rightarrow y_1$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 45 \rightarrow y_2$$

$$2x_2 \leq 20 \rightarrow y_3 \qquad\qquad -5x_1$$

$$x_1 \qquad \leq 30 \rightarrow y_4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

الحل:

بما إن دالة الهدف من نوع Max، والقيود جميعها من نوع $\leq$، والمتغيرات x_1, x_2 مقيدة بالإشارة، لذا فإنه من الممكن كتابة النموذج المقابل مباشرة بافتراض إن y_1, y_2, y_3, y_4 متغيرات لهذا النموذج وكالآتي:

$$Min\ Z_0 = 60y_1 + 45y_2 + 20y_3 + 30y_4$$

s. to:

$$y_1+2y_2+5y_3+y_4 \geq 5$$

$$9y_1+3y_2-2y_3 \geq 6$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

نلاحظ من المثال أعلاه، بأن النموذج المقابل يحتوي على عدد من القيود أقل من قيود النموذج الأولي، ولما كان الحل الأمثل لإحدى المسألتين يعطي معلومات كاملة عن الحل الأمثل للمسألة الأخرى، لهذا فمن المفيد إذن حل النموذج المقابل لأن الصعوبة الحسابية في مسائل البرمجة الخطية تأتي من كثرة القيود.

3 –3 النموذج الثنائي إذا كان النموذج الأول بالصيغة القياسية

Dual Problem when primal Model in Standard Form

لقد ذكرنا سابقاً، إنه في الصيغة القياسية لمسألة البرمجة الخطية، تكون جميع القيود عبارة عن معادلات، وسوف نبين فيما يلي إن كل قيد مساواة **Equality constraint** في المسألة الأولية (أو الثنائية) يناظر متغير غير مقيد بالإشارة في الثنائية (والأولية).

فإذا كانت مسألة البرمجة الخطية التالية بالشكل القياسي:

$$Max\, x_0 = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

$$s.to:$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1,2...m$$

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1,2...n$$

فإن النموذج المقابل لها كالآتي:

$$Min\ y_0 = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$s.to:$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_i \qquad j = 1,2...n$$

$$y_i\ (unrestricted\ in\ sign)$$

غير مقيدة بالإشارة

وإذا كانت مسألة البرمجة الخطية بالشكل التالي:

$$Max\ x_0 = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

$$s.to:$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1,2,...,m$$

$$x_j\ unresteried\ in\ sign$$

فإن النموذج المقابل لها سيكون كالآتي:

$$Min\ y_0 = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$s.to:$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_i \qquad i = 1,2...n$$

$$y_i \geq 0$$

Introduction and Definition of Transportation Model

سوف نتناول في هذا الفصل إحدى تطبيقات البرامج الخطية ألا وهو نموذج النقل (نموذج التوزيع) يبحث هذا النموذج في إيجاد القيمة الصغرى لكلفة نقل البضاعة من عدة مصادر للعرض Sources والتي قد تمثل المراكز الإنتاجية أو التسويقية أو المصانع التي تنقل منها البضاعة إلى عدد من محطات الطلب أو مراكز الاستهلاك Destination.

إن الكميات المعروضة عند كل مصدر والكميات المطلوبة في كل موقع يفترض أن تكون معلومة وعلى سبيل المثال المنتج ربما ينقل من البضائع التي تمثل المصادر هنا إلى المخازن المركزية (المواقع).

بالإمكان تحليل مسألة النقل (لتحديد الكميات المثلى التي ستنقل من المصادر إلى المواقع بأقل كلفة نقل ممكنة باستخدام الطريقة العامة المطبقة عند تحليل مسائل البرمجة الخطية (طريقة السمبلكس simplex method) لكن نظراً لطبيعة مسألة النقل الخاصة فقد طورت طرق جديدة لها ميزات خاصة تجعلها ملائمة عند التحليل بشكل أفضل من طريقة السمبلكس وان هذا الأسلوب الجديد في التحليل يختلف عن طريقة السمبلكس في المعالجة الرياضية للمسألة لكنه من حيث المبدأ يلتقي معها تماماً باعتباره يبدأ باختيار الحل الأساسي الابتدائي المقبول Starting Basic Feasible solution S.B.F.S ومن ثم يطور هنا الحل للوصول إلى الحل الأمثل الذي تكون عنده قيمة دالة الكلفة (دالة الهدف) في نهايتاها الصغرى. وسوف نبين في الفقرة التالية التعريف الرياضي العام لنموذج النقل.

ويتضمن نموذج النقل m من مصادر التجهيز، n من محطات (الاستهلاك) إضافة إلى ذلك نفترض إن:

a_i: يمثل عدد الوحدات المعروضة عند المصدر من حيث ($i= 1,2,3,\dots m$)

b_j: يمثل عدد الوحدات المطلوبة بالبينة للموقع j حيث ($j= 1,2,3,\dots,n$)

c_{ij}: كلفة نقل الوحدة الواحدة من البضاعة من المصدر إلى الموقع j

x_{ij}: عدد الوحدات التي ستنقل من المصدر i إلى الموقع j والجدول الآتي يعرض الصورة الجدولية العامة لنموذج النقل

Destination

	1	2	j…	N	Supply
1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	C_{ij} X_{ij}	C_{in} X_{in}	a_1
2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	C_{2j} X_{2j}	C_{2n} X_{2n}	a_2
3	C_{31} X_{31}	C_{32} X_{32}	C_{3j} X_{3j}	C_{3n} X_{3j}	a_3
:	:				:
I	C_{i1} X_{i1}	C_{i2} X_{i2}	C_{ij} X_{ij}	C_{in} X_{in}	a_i
:					
M	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}	C_{m3} X_{m3}	C_{mn} X_{mn}	a_m
Demand	b_1	b_2	b_j	b_n	

اتضح لنا إن الهدف من تحليل نموذج النقل هو تحديد العدد الأمثل من الوحدات التي ستنقل من المصدر i إلى الموقع j بأقل كلفة ممكنة c اعتماداً على هذا الهدف، يمكننا كتابة نموذج البرمجة الخطية المكافئ لنموذج النقل بالشكل التالي

$$Minimize\, X_0 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij}$$

طبقاً إلى

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = a_i \quad i = 1,2,...m$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = b_i \quad j = 1,2,...n$$

$$X_{ij} \geq 0$$

لتسهيل دراسة مشكلة النقل تعرض الصورة الجدولية التالية التي تمثل نموذج نقل مبسطة من $n=3, m=2$

جدول رقم (2)

TO / From	D_1	D_2	D_3	الكمية المعروضة Supply
S_1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	C_{13} X_{13}	a_1
S_2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	C_{23} X_{23}	a_2
Demand	b_1	b_2	b_3	

حيث تمثل C_{11} كلفة نقل الوحدة الواحدة من البضاعة من المصدر الأول إلى الموقع الأول وكذلك C_{23} تمثل كلفة نقل الواحدة من المصدر الثاني إلى الموقع الثالث وهكذا أما X_{12} فتمثل عدد الوحدات التي ستنقل من المصدر الاول إلى الموقع الثاني وعلى نفس الأساس تعرف بقيمة قيم X_{ij}

من الجدول 2 يتضح إن الكمية المنقولة من المصدر الأول إلى المواقع الثلاثة يجب أن لا تزيد على الكمية المعروضة (a_1) أي إن

$$x_{11}+x_{12}+x_{13} \leq a_1$$

وكذلك

$x_{21}+x_{22}+x_{23} \leq a_2$

إضافة إلى ذلك فإن مجموع الكمية المنقولة إلى المصدر الأول يجب أن لا تقل عن احتياج ذلك الموقع وهي b_1. بعبارة أخرى، يجب أن يكون

$x_{11}+x_{21} \geq b_1$

$x_{12}+x_{22} \geq b_2$

$x_{13}+x_{23} \geq b_3$

أما دالة كلفة النقل الكلية (دالة الهدف) فستكون:

$x_0= c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+c_{13}x_{13}+c_{21}x_{21}+c_{22}x_{22}+c_{23}x_{23}$

واستناداً إلى ما ورد سابقاً يمكننا اختصار تعريف مشكلة النقل بالصورة العامة التالية:

استخرج قيمة x_0 الصغرى حيث

$$X_0 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij}$$

وفقاً إلى مجموعة القيود

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} \leq a_n \quad j = 1,2,\ldots,n$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} \geq b_j \quad j = 1,2,\ldots.,n \qquad . \ . \ 2$$

$$X_{ij} \geq 0 \ \forall (i,j)$$

لو قارنا هذه الصيغة العامة للبرمجة الخطية نلاحظ إن دالة الهدف القيود تمثل صيغة من صيغ البرمجة الخطية لذلك نجد من الممكن استخدام الطريقة العامة المطبقة عند تحليل البرامج الخطية (طريقة السمبكلس).

أن إيجاد الحلول المطلوبة لمشكلات النقل يتم بتحويل قيود المتباينات المشار إليها أعلاه إلى قيود مساواة.

Russels Approximation Method(R.A.M)

هذه الطريقة افضل من طريقة فوجل لأنها تعطينا حل ابتدائي أقرب للحل الامثل(خصوصا للمصفوفات الكبيرة) وخطواتها هي:

أ- تحديد أعلى كلفة نقل لكل صف(يرمزلها a^-) ولكل عمود(ويرمز لها b^-).

ب- تشكيل مصفوفة جديدة كلفها هي($C_{ij}^- =(C_{ij}- a^- -b^-$.

ج- نحدد الخلية التي لها اصغركلفة نقل (C_{ij}^-), ونعطي لمتغيرها أكبر كمية ممكنة والتي تساوي(min.(ai,bj.

د- يحذف الصف(العمود) المتحقق وتغير كمية تجهيزالصف أو طلب العمود الذي تقع فيه الخلية الى مقدار الفرق بين كميتي التجهيز والطلب المقابلة لهما.

ه- 1. اذا بقى صف(عمود) واحد نعطي الصف(العمود)المتبقي كميات الطلب والتجهيز المتبقية

2. اذا بقى اكثر من صف (عمود) واحد نعود للخطوة (أ).

مثال(1): اوجد الحل الاولي لمشكلة النقل بأستخدام طريقة روسيل التقريبية المبينة في الجدول (1).

Example(1): find the starting solution in the following transportation problem by using Russels Approximation Method (R.A.M) which explains in table (1):

	D1	D1	D1	D1	SUPPLY
S1	2	3	4	5	15
S2	3	2	5	2	20

S3	4	1	2	3	25
Demand	8	10	12	15	

بسبب عدم التوازن لان كميات العرض اكبر من كميات الطلب لذلك سنضيف عمود جديد لغرض التوازن.

	D1	D2	D3	D4	D5	SUPPLY
S1	2	3	4	5	0	15
S2	3	2	5	2	0	20
S3	4	1	2	3	0	25
Demand	8	10	12	15	15	60

الحل النهائي الاولي لطريقة رووسل هو:

	D1	D2	D3	D4	D5	SUPPLY
S1	2 (8)	3	4	5	0 (7)	15
S2	3	2	5	2 (12)	0 (5)	20
S3	4	1 (10)	2 (12)	3	0 (3)	25
Demand	8	10	12	15	15	60

جدول الحل النهائي لهذه الطريقة استخرج استنادا للجداول ادناه:

	D1	D2	D3	D4	D5
S1	-7	-5	-6	-5	-5
S2	-6	-6	-5	-8	-5
S3	-4	-6	-7	-6	-4

نملأ الخلية X24 ويحذف الموقع D4 :

	D1	D2	D3	D5
S1	-6	-4	-5	-4
S2	-6	-6	-5	-5
S3	-4	-6	-7	-4

نملأ الخليةX33 ويحذف الموقع D3 :

	D1	D2	D5
S1	-5	-3	-3
S2	-4	-4	-3
S3	-4	-6	-4

نملأ الخليةX32 ويحذف الموقع D2 :

	D1	D5
S1	-4	-2
S2	-4	-3
S3	-4	-4

نملأ الخليةX35 ويحذف المصدر S3 :

	D1	D5
S1	-3	-2
S2	-3	-3

نملأ الخليةX25 ويحذف المصدر S2 , لذا تعطى لذا تعطى القيم المتبقية للخليتين الباقيتين,X11 X15, لبقاء صف واحد.

T.T.C= 2*8+0*7+2*15+0*5+1*10+2*12+0*3=80

مثال (2):- اوجد الحل الاولي لمشكلة النقل بأستخدام طريقة روسيل التقريبية المبينة في الجدول (2).

Example (2): find the starting solution in the following transportation problem by using Russels Approximation Method (R.A.M) which explains in table (2):

Table (2)

	D1	D2	D3	supply
S1	5	1	8	12
S2	2	4	0	14
S3	3	6	7	4
demand	9	10	11	30

الحل حسب خطوات طريقة رسل هي:-

	D1	D2	D3	supply
S1	5 (2)	1 (10)	8	12
S2	2 (3)	4	0 (11)	14
S3	3 (4)	6	7	4
demand	9	10	11	30

T.T.C= 5*2+1*10+2*3+0*11+3*4= 38

جدول الحل النهائي لهذه الطريقة استخرج استنادا للجداول ادناه:

	D1	D2	D3
S1	-8	-13	-7
S2	-7	-6	-11
S3	-9	-7	-8

نملأ الخليةX23 ويحذف الموقع D3 :

	D1	D2
S1	-1	-10
S2	-7	-6
S3	-8	-6