الاعداد الحقيقية (R) :The real numbers

تحتوى مجموعة الاعداد الحقيقيه على عدد من المجموعات الجزئية :

1- الاعداد الطبيعية (N) : The Natural numbers $N=\{1, 2, 3, ...\}$

2- الاعداد الصحيحة (I OR Z) :The integer numbers I OR $Z=\{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$

3- الاعداد النسبية (Q) :The Rational numbers وهي كل الاعداد التي تكتب على شكل

$\frac{a}{b}$ ، b, a اعداد صحيحة بحيث ان $b \neq 0$ ، $Q=\{x \in R: x=\frac{p}{q}, p, q \in Z, q \neq 0\}$

4- الاعداد الغير نسبية (Q') The irrational numbers : وهي كل الاعداد التي لايمكن ان تكتب على شكل كسر اعتيادي او كسر عشري منته او كسر دوري (متكرر) .

$\frac{5}{2}=2.5$ كسر عشري منته (عدد نسبي)

$\frac{2}{9}=0.222222222222$ كسر عشري دوري متكرر (عدد نسبي)

$\sqrt{4}=2$ (عدد نسبي)

$\pi=3.142857142857143$ كسر عشري غير منته وغير دوري (عدد غير نسبي)

$\sqrt{2}=1.414213562373$ كسر عشري غير منته وغير دوري (عدد غير نسبي)

$\sqrt[3]{9}=2.080083823051904$ كسر عشري غير منته وغير دوري (عدد غير نسبي)

كل الاعداد التي ليست لها جذر تربيعي (ليست مربع كامل) اعداد غير نسبية مثل $\sqrt{6}$ $\sqrt{7}$ $\sqrt{2}$

كل الاعداد التي ليست لها جذر تكعيبي (ليست مكعب كامل) اعداد غير نسبية مثل $\sqrt[3]{10}$ $\sqrt[3]{4}$ $\sqrt[3]{9}$

$$N \subset I \subset Q \subset R$$
$$R = Q \cup Q'$$

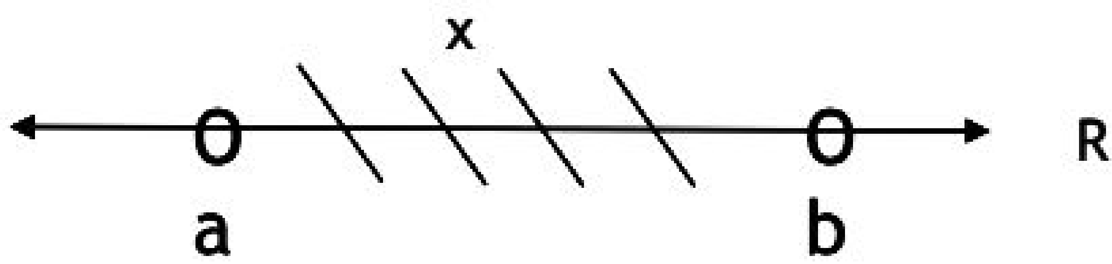
الفترات : Intervals

1) الفترات المنتهية : Finite Intervals

a) الفترة المفتوحة :

Open interval = $\{x \in R: a < x < b\} = (a , b)$

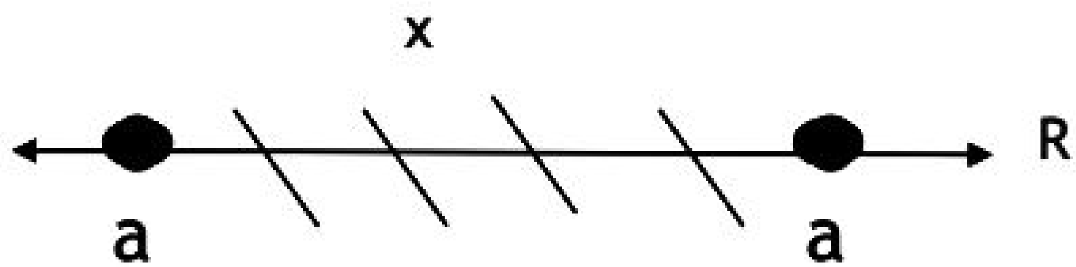
$a \notin (a,b)$, $b \notin (a,b)$



a) الفترة المغلقة : Closed interval

Closed interval = $\{x \in R: a \leq x \leq b\} = [a , b]$

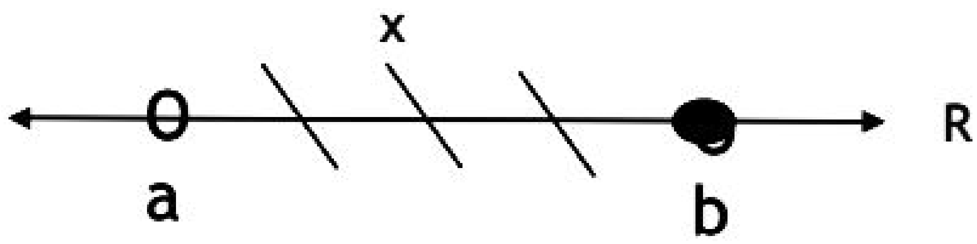
$a \in [a,b]$, $b \in [a,b]$



The half open interval : الفترة نصف مفتوحة (c

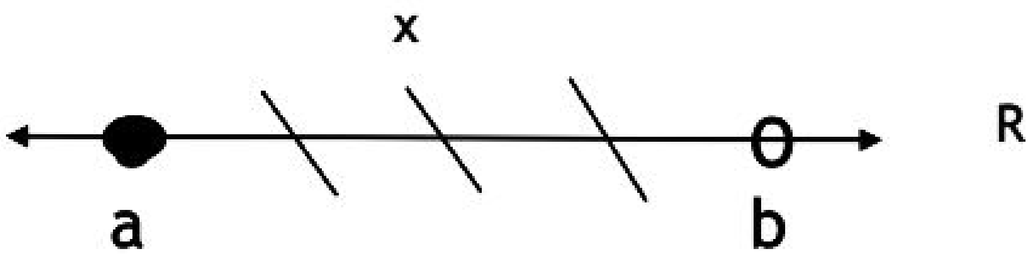
The half open interval from the left = $\{x \in R : a < x \leq b\} = (a\,,b]$

$a \notin (a,b]$, $b \in (a,b]$



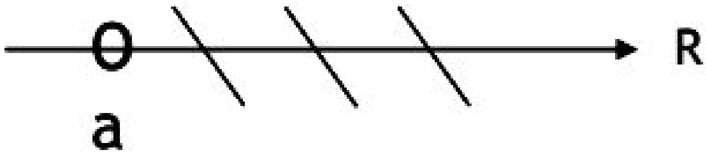
The half open interval from the right = $\{x \in R : a \leq x < b\} = [a\,,b)$

$a \in [a,b)$, $b \notin [a,b)$

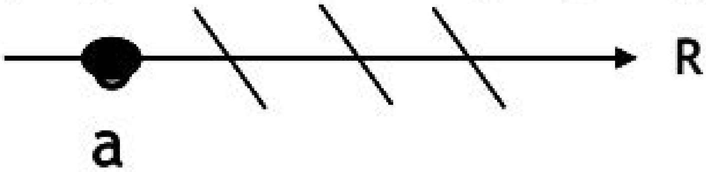


Infinite Intervals : الفترات الغير المنتهية (2

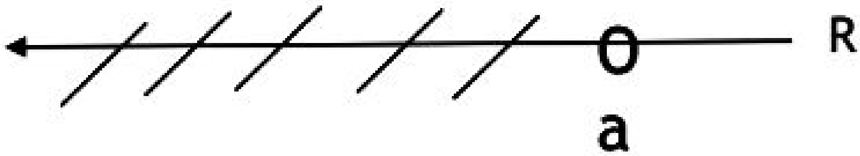
a) $\{x \in R : x > a\} = \{x \in R : a < x < \infty\} = (a, \infty)$



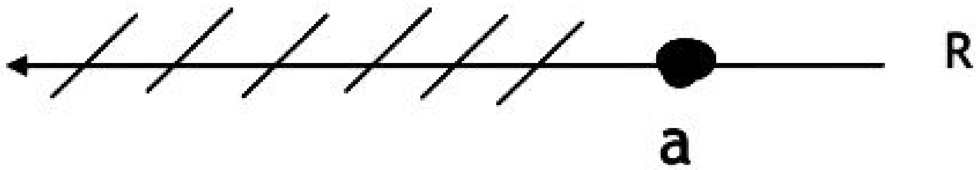
b) $\{x \in R : x \geq a\} = \{x \in R : a \leq x < \infty\} = [a, \infty)$



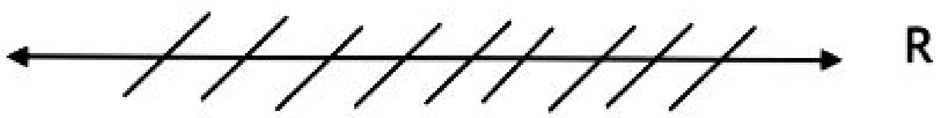
c) $\{x \in R : x < a\} = \{x \in R : -\infty < x < a\} = (-\infty, a)$



d) $\{x \in R : x \leq a\} = \{x \in R : -\infty < x \leq a\} = (-\infty, a]$



e) $\{x \in R : -\infty < x < \infty\} = (-\infty, \infty) = R$



Inequalities : المتباينات

لكل a ينتمي الى مجموعة الاعداد الحقيقة . فاذا كانت a اكبر من b فتكتب بالشكل $a > b$.

واذا كانت a اصغر من b فتكتب بالشكل $a < b$.

خواص المتباينات : لكل a, b, c تنتمي الى R فان :

1) If $a < b \rightarrow a + c < b + c$

2) If $a < b$, $c > 0 \rightarrow ac < bc$

3) If $a < b$, $c < 0 \rightarrow ac > bc$

Example 1 : solve the following inequality $3(x + 2) < 5$.

Solution: $3x + 6 < 5 \rightarrow 3x < 5 - 6$

$$\rightarrow 3x < -1$$

$$\rightarrow x < \frac{-1}{3}$$

$$S.S = \left\{x \in R : x < \frac{-1}{3}\right\} = \left(-\infty, \frac{-1}{3}\right)$$

◀ القيمة المطلقة : Absolute Value

◀ القيمة المطلقة للعدد الحقيقي x يرمز لها بالرمز $|x|$ وتعرف كمايأتي :

$$|x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$ ◀

خواص القيمة المطلقة:

1) $|-a| = |a|$

2) $||a|| = |a|$

3) $|a \,.\, b| = |a| \,.\, |b|$

4) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

5) $|a + b| \leq |a| + |b|$

برهان (3)

$$|a \,.b| = \sqrt{(a \,.b)^2} = \sqrt{a^2 \,.b^2} = \sqrt{a^2} \,.\, \sqrt{b^2} = |a| \,.\, |b|$$

هندسياً القيمة المطلقة للعدد x هي المسافة بين 0 والعدد x على خط الاعداد وان المسافة تكون اكبر او تساوي صفر وهذا يعني $|x| \geq 0$

والمسافة بين x و y على خط الاعداد الحقيقية هي $|x - y|$.

القيمة المطلقة والفترات :

- $|x| < a \leftrightarrow -a < x < a$
- $|x| \leq a \leftrightarrow -a \leq x \leq a$
- $|x| > a \leftrightarrow x > a \ \ or \ \ x < -a$
- $|x| \geq a \leftrightarrow x \geq a \ \ or \ \ x \leq -a$

Example 3 : solve the following inequality $|2x - 3| \leq 1$.

Solution: $|2x - 3| < 1 \quad \rightarrow -1 \leq 2x - 3 \leq 1$

$$\rightarrow 3 - 1 \leq 2x \leq 1 + 3$$

$$\rightarrow 2 \leq 2x \leq 4$$

$$\rightarrow 1 \leq x \leq 2$$

$$s.s = \{x \in R : 1 \leq x \leq 2\} = [1,2]$$

Exercises1 : solve the following inequalities:

1) $7 < 2x + 3 < 11$

2) $|7 - 4x| \geq 1$

3) $|2x - 3| > 1$

4) $x^2 > 25$

تعريف الدالة : The function

لتكن A ,B مجموعتين غير خاليتين . ان العلاقة التي تربط كل عنصر ينتمي الى A بعنصر وحيد ينتمي الى B تسمى دالة .

$$f: A \to B, \forall\ x \in A,\ \exists y \in B \ni f(x) = y$$

ملاحظة: 1) تسمى المجموعة A مجموعة المجال (Domain) ويرمز لها بالرمز D_f .

2) تسمى المجموعة B مجموعة المجال المقابل (Co-Domain) .

3) مجموعة عناصر صور المجال في المجال المقابل تسمى مدى الدالة (Range) ويرمز لها بالرمز R_f

$$R_f = \{f(x) = y\ ;\ x \in D_f\}$$

بعض انواع الدوال :

1) تسمى الدالة متباينة (Injection , One – One) اذا كانت $\forall a, b \in A,\ a \neq b \to f(a) \neq f(b)$.

2) تسمى الدالة شاملة (Surjection , Onto) اذا كانت مدى الدالة = المجال المقابل .

3) تسمى الدالة f دالة ذاتية (Identity function) اذا كانت $f: A \to A,\ f(x) = x$.

4) الدالة الفردية (Odd function) تسمى f دالة فردية اذا كانت $f(-x) = -f(x)$, $f : A \to B$.

Example : $f(x) = x^3 + x$

$$f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -f(x)$$

5) الدالة الزوجية (Even function) تسمى الدالة f دالة زوجية اذا كانت $f: A \to A, f(-x) = f(x)$.

Example : $f(x) = x^2 + 4$

$$f(-x) = (-x)^2 + 4 = x^2 + 4 = f(x)$$

6) متعددة الحدود (Polynomial function) تسمى الدالة f متعددة حدود اذا كانت على شكل :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

الدالة الثابتة (constant function) $If\ n = 0 \ \rightarrow \ f(x) = a_0$

الدالة الخطية (linear function) $If\ n = 1 \ \rightarrow \ f(x) = a_1 x + a_0$

الدالة الغير الخطية (nonlinear function) $If\ n = 2 \ \rightarrow \ f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

7) دالة القيمة المطلقة Absolut value function .

$$f(x) = |x| = f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$$D_f = R \quad , \qquad R_f = R^+ \cup \{0\}$$

8) دالة الاشارة Sign function :

$$f(x) = sgn(x) = \begin{cases} 1 & if \ \ x > 0 \\ 0 & if \ \ x = 0 \\ -1 & if \ \ x < 0 \end{cases}$$

$$D_f = R \quad , \qquad R_f = \{-1, 0, 1\}$$

9) دالة الصحيح الاعظم The greatest integer function :

اذا كان x عدد حقيقي فأن [x] هو أكبر عدد صحيح لايزيد على x ويرمز لها بالرمز $f(x) = [x]$

[3.2]= 3 , [3.8]=3 , [3]=3 , [-5]= - 5 , [-0.5]= -1 , [-2.5] = -3

$$f(x) = \begin{cases} \vdots & \\ 2 & if \quad 2 \le x < 3 \\ 1 & if \quad 1 \le x < 2 \\ 0 & if \quad 0 \le x < 1 \\ -1 & if \quad -1 \le x < 0 \\ -2 & if \quad -2 \le x < -1 \\ \vdots & \end{cases}$$

$D_f = R$, $R_f = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\} = Z$

10) الدالة الكسرية Rational function :

اذا كانت $f:A \to B$ تسمى f دالة كسرية اذا كانت $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}, h(x) \neq 0$.

11) الدالة الجذرية The root function :

$$f:A \to B \quad , \quad y = \sqrt[n]{f(x)}$$

- **تحديد المجال والمدى للدالة .**

1) متعددات الحدود والجذور التكعيبية مجالها كل الاعداد الحقيقية .

Example 1: $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x - 5$

$D_f = R \; , \; R_f = R$

Example 2: $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 1}$

$D_f = R \; , \; R_f = R$

2) المجال للدوال الجذور الزوجية مثل الجذور التربيعية

هو كل الاعداد الحقيقية التي تجعل المقدار تحت الجذر اكبر من او تساوي صفر.

Example 1: **Find the Domain and Range of the function** $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

$$x^2 - 9 \geq 0 \quad \rightarrow \quad (x-3)(x+3) \geq 0$$

اما

$\rightarrow x - 3 \geq 0 \ \wedge \ x + 3 \geq 0$

$\rightarrow x \geq 3 \ \wedge \ x \geq -3$

$\rightarrow [3,\infty)$

او

$\rightarrow x - 3 \leq 0 \ \wedge \ x + 3 \leq 0$

$\rightarrow x \leq 3 \ \wedge \ x \leq -3$

$\rightarrow (-\infty, -3]$

$D_f = (-\infty, -3] \cup [3,\infty) = R \ \setminus \ (-3,3)$

$$y = \sqrt{x^2 - 9} \rightarrow y^2 = x^2 - 9 \geq 0 \rightarrow y^2 \geq 0 \rightarrow R_f = R^+ \cup \{0\}$$

3) مجال الدوال الكسرية هو كل الاعداد الحقيقية عدا التي تجعل المقام تساوي صفر .

Example 1: Find the Domain and Range of the function $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$

$x^2-1=0 \rightarrow (x-1)(x+1)=0$

$D^f = R \setminus \{-1,1\}$

$y=\frac{x}{x^2-1} \rightarrow yx^2-y=x$

$yx^2-x-y=0$

نحل المعادلة بالنسبة ل x

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{1\pm\sqrt{1+4y^2}}{2y}$

$\rightarrow y\neq 0\ ,1+4y^2\geq 0$

$\rightarrow y^2\geq 0$

$\rightarrow\ R_f = R \setminus \{0\}$

العمليات على الدوال :

لتكن كل من f , g دالتين مختلفتين فأن

1) $(f \mp g)_x = f(x) \mp g(x)$

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

2) $(f . g)_x = f(x) . g(x)$

$$D_{f.g} = D_f \cap D_g$$

3) $\left({}^{f}/_{g}\right)_x = \frac{f(x)}{g(x)} \quad , g(x) \neq 0$

$$D_{f/g} = D_f \cap D_g \setminus \{x \in R: \ g(x) = 0\}$$

تعريف: لتكن f دالة حقيقية مجالها D ولتكن a عددا حقيقياً يقال ان غاية الدالة f عند a هي L بحيث ان

$$\forall x \in D,\ |x-a| < \epsilon \ \rightarrow |f(x)-L| < \epsilon$$

وتكتب باختصار $\lim_{x \to a} f(x) = L$

Example: Find the limit of the function $f(x) = x^2 + 3$ as x approaches 2.

من جهة اليمين

x	3	2.5	2.1	2.01	2.001	2.0001
f(x)	12	9.25	7.44	7.040	7.004	7.0007≃ 7

من جهة اليسار

x	1	1.2	1.5	1.9	1.99	1.999
f(x)	4	4.44	5.95	5.98	6.98	6.999 ≃ 7

نستطيع ان نستنتج من المثال اعلاه انه عندما x تقترب من 2 من جهة اليمين واليسار فان f(x) تقترب من 7.

$$\rightarrow \lim_{x \to 2}(x^2+3) = 7$$

وحداينة الغاية : اذا كان للدالة f(x) غاية عندما تقترب x من a فأن هذه الغاية تكون وحيدة.

- اذا كانت f(x) الدالة الذاتية f(x)=x فأن لاي قيمة a $\lim_{x\to a} f(x) = a$
- اذا كانت f(x) الدالة الثابتة f(x)=c فأن لاي قيمة a $\lim_{x\to a} f(x) = c$
- **خواص الغاية :**

if $\lim_{x\to a} f_1(x) = L_1$, $\lim_{x\to a} f_2(x) = L_2$

1) $\lim_{x\to a}[f_1 \mp f_2] = L_1 \mp L_2$

2) $\lim_{x\to a} f_1 . f_2 = L_1 . L_2$

3) $\lim_{x\to a} k\, f_1(x) = k \lim_{x\to a} f_1(x) = k\, L_1$

4) $\lim_{x\to a} \frac{f_1}{f_2} = \frac{L_1}{L_2}$, $L_2 \neq 0$

- لحساب الغاية فأننا أولا نقوم بالتعويض المباشر في الدالة فأذا كانت قيمة الغاية بعد التعويض كمية غير معرفه (صفر في المقام والبسط , كمية سالبة تحت الجذر التربيعي) فأننا نلجأ الى عملية التحليل والاختصار او الضرب في مرافق المقام او البسط ومن ثم نحسب الغاية.

Example 1: $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$

Solution: $$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \to 2}(x+2) = 4$$

Example 2: $\lim_{x \to 0} \frac{2x}{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}$

Solution: $$\lim_{x \to 0} \frac{2x}{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}} = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2x\,(\sqrt{x+3}+\sqrt{3})}{x+3-3} = 2\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}\right) = 4\sqrt{3}$$

- الغاية من جهة اليمين والغاية من جهة اليسار :

الغاية من جهة اليمين $\lim_{x\to c^+} f(x)$

الغاية من جهة اليسار $\lim_{x\to c^-} f(x)$

$\lim_{x\to c} f(x)$ موجودة وتساوي L اذا كانت $\lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x) = L$

Example 1: show that $\lim_{x\to 0} |x| = 0$

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} -x = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

Example 2: Calculate the limit of the function

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad x \le 2 \\ 8 - 2x & , \quad x > 2 \end{cases}$$

When $x \to 2$.

Solution:

$$\Rightarrow \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} 8 - 2x = 8 - 4 = 4$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} x^2 = 4$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = 4$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 2} f(x) = 4$$

- اذا كان المقام يساوي صفر والبسط لايساوي صفر ولاتوجد اي طريقة للتحليل و الاختصار فأن الغاية غير موجود وتساوي (∞) وتسمئ الغاية اللانهائية.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{0} = \infty \quad , \quad \lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-2}{x^2} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -2} \frac{5(x-3)}{(x+2)^2\sqrt{x+4}} = -\infty$$

- عندما تكون الدالة على شكل جذر زوجي وكان x يقترب من a وهو بداية مجال الدالة فان الغاية غير موجودة لانة لايمكن ان نحسب الغاية من جهة اليسار.

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{x}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}=\sqrt{0}=0 \quad , \quad \lim_{x\to 0^-}\sqrt{x} \quad \text{غير موجودة}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\neq\lim_{x\to 0^-}\sqrt{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{x} \quad \text{غير موجودة}$$

Example 3: Find $\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{x^3-8}$

$$\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{x^3-8}=\sqrt[3]{8-8}=0$$

Example 4: Find $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-2}}{x-2}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-2}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x-2}}$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{\sqrt{x-2}}=\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{\sqrt{2-2}}=\frac{1}{0}=\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{\sqrt{x-2}} \quad \text{غير موجودة}$$

$$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-2}}{x-2} \quad \text{غير موجودة}$$

تعريف : تكون الدالة f مستمرة عند النقطة a اذا وفقط اذا

1) f(a) موجوده

2) $\lim_{x\to a} f(x)$ موجودة

3) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

ملاحظة : تكون الدالة غير مستمرة عند النقطة a اذا لم يتحقق احد الشروط الثلاثة اعلاه.

Example 1: Is the function $f(x) = x^2 - 3$ continuous at x=2.

Solution: 1) $f(2) = 2^2 - 3 = 1$

2) $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} (x^2 - 3) = 2^2 - 3 = 1$

3) $\lim_{x\to 2} f(x) = f(x) = 1$

f مستمرة عند x=2 .

Example 2: Is the function $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x+3}, & x \neq -3 \\ -6, & x = -3 \end{cases}$ continuous at x=-3.

Solution : 1) $f(-3) = -6$

2) $\lim_{x\to -3^-} f(x) = \lim_{x\to -3^-} \frac{x^2-9}{x+3} = \lim_{x\to -3^-} \frac{(x+3)(x-3)}{(x+3)} = -6$

$\lim_{x\to -3^+} -6 = -6$

$\lim_{x\to -3^-} f(x) = \lim_{x\to -3^+} f(x) = -6$

3) $\lim_{x\to -3} f(x) = f(-3) = -6$

$\leftarrow f$ مستمرة عند x=-3.

الاستمرارية عند نقطة في بداية ونهاية الفترة

* الدالة f(x) تكون مستمرة عند نقطة في بداية الفترة من جهة اليسار a اذا كان

1) $f(a)$ موجودة

2) $\lim_{x\to a^+} f(x)$ موجودة

3) $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

* الدالة f(x) تكون مستمرة عند نقطة في نهاية الفترة من جهة اليمين a اذا كان

1) $f(a)$ موجودة

2) $\lim_{x\to a^-} f(x)$ موجودة

3) $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$

Example 3: Is the function $f(x) = \sqrt{x}$ continuous at x=0.

Solution:

$$D_f = \{x \in R : \ x \geq 0\} = [0, \infty)$$

x=0 هو نقطة بداية فترة تعريف الدالة (مجال الدالة) D_f من جهة اليسار.

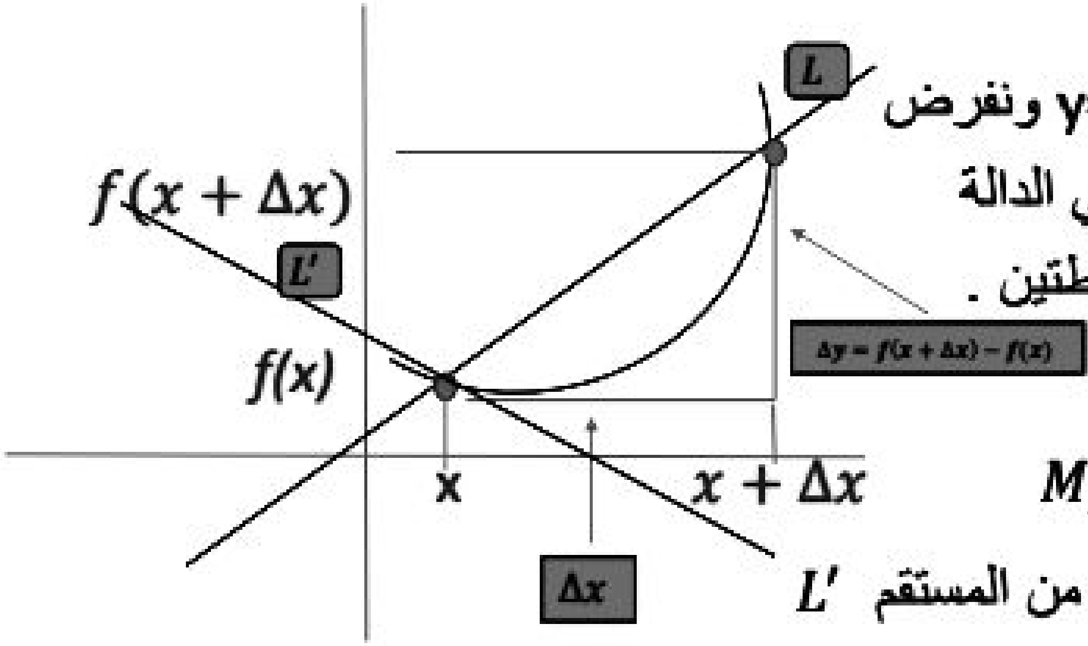
1) $f(0) = \sqrt{0} = 0$ موجودة

2) $\lim_{x\to a^+} f(x) = \sqrt{0} = 0$ موجودة

3) $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) = \sqrt{0} = 0$

$\leftarrow f$ مستمرة عند x=0.

المشتقة الاولى :



نفرض ان $(x, f(x))$ نقطة على منحني الدالة $y=f(x)$ ونفرض ان $(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$ نقطة اخرى على منحني الدالة $y=f(x)$ حيث ان Δx هي الفرق بين الاحداثي x للنقطتين .

فأن ميل المستقيم L المار بالنقطتين هو

$$M_L = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{(x+\Delta x) - (x)} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

نلاحظ بأن كلما قلة قيمة Δx فأن المستقيم L يقترب من المستقم L'

فأذا اقتربت Δx من الصفر فأن المستقيم L ينطبق على المستقيم L'

وان ميل المستقيم L = ميل المستقيم L' لذلك يكون ميل المماس للمنحي $Y=f(x)$ عند النقطة $(x, f(x))$ هو

$$M = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

تسمى العلاقة اعلاة بالمشتقة الاولى ويرمز لها بالرمز $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$, y'

- نقول ان $f(x)$ دالة قابلة للاشتقاق على الفترة (a, b) اذا كانت f قابلة للاشتقاق عند كل نقطة من نقط (a, b) .
- عندما تكون الغاية في العلاقة السابقة موجودة فأن الدالة $f(x)$ تسمى قابلة للاشتقاق وان $f'(x)$ تسمى مشتقة الدالة الاولى .

Example 1: Using the definition of the derivative to find the derivative of the function $f(x) = 4x - 2$.

Solution: $y' = f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4(x+\Delta x)-2-(4x-2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4x+4\Delta x-2-4x+2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(4\Delta x)}{\Delta x} = 4$$

مبرهنة : اذا كانت f(x) دالة قابلة للاشتقاق عند x_0 فأن f(x) تكون مستمرة عند x_0.

ملاحظة : ان معكوس هذه المبرهنة ليس صحيح . هذا يعني ان ليست كل دالة مستمرة عند نقطة هي قابلة الاشتقاق عند تلك النقطة .

Example 4 : $f(x)=|x| \quad , \quad x=0$

Solution: $y'=f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|x+\Delta x|-|x|}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|0+\Delta x|-|0|}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

$$\boxed{\begin{cases}\Delta x, & \Delta x\geq 0\\ -\Delta x, & \Delta x<0\end{cases}}$$

$\rightarrow L^{+}\neq L^{-} \quad \rightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x)$ غير موجود

f(x) غير قابلة للاشتقاق

• قواعد المشتقة

1) $If\ f(x) = c \ \rightarrow\ f'(x) = 0$
2) $If\ f(x) = x^n\ ,\ n \in R\ \rightarrow\ f'(x) = nx^{n-1}$
3) $If\ f(x) = c\ g(x)\ ,c\ \ is\ a\ constant\ number \rightarrow\ f'(x) = c\ g'(x)$
4) $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$
5) $[f(x).g(x)]' = f(x).g'(x) + g(x).f'(x)$
6) $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
7) $y = [f(x)]^n \rightarrow y' = n\ [f(x)]^{n-1}\ .\ \ f'(x)$

Examples:

1) $f(x) = 4 \ \rightarrow\ \ f'(x) = 0$
2) $f(x) = x \ \rightarrow\ \ f'(x) = 1$
3) $f(x) = 3x \ \rightarrow\ \ f'(x) = 3$
4) $f(x) = x^3 \ \rightarrow\ \ f'(x) = 3x^2$
5) $f(x) = 2x^7 \ \rightarrow\ \ f'(x) = 14x^6$
6) $f(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3} \ \rightarrow\ \ f'(x) = -3\ x^{-4} = \frac{-3}{x^4}$
7) $f(x) = \frac{3}{x^5} = 3x^{-5} \rightarrow\ \ f'(x) = -15x^{-6} = \frac{-15}{x^6}$
8) $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \ \rightarrow\ \ f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
9) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}} \ \rightarrow\ \ f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

• قاعدة السلسلة :

1) Let $y = f(t)$, $t = g(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

2) Let $y = f(t)$, $x = g(t)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Example 1 : if $y = 2t^2 - 1$, $t = 2x$ **find** $\frac{dy}{dx}$

Solution: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = (4t)(2) = (4(2x))(2) = 16x$

Example 1 : if $y = t^2 - 1$, $x = 2t + 3$ **find** $\frac{dy}{dx}$

Solution: $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t}{2} = t = \frac{x-3}{2}$

• الاشتقاق الضمني :

اذا كانت الدالة y=f(x) فأنه من السهوله ايجاد المشتقة الاولى بأستخدام قواعد الاشتقاق السابقة اما اذا كانت y ضمن علاقة او معادلة يصعب التعبير عنها بدلالة x مثل

$$3y^2x^2 + 6y\,x - 5x^2 = 10$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

لذلك لايجاد المشتقة y' من الدالة الضمنية نعتبر y هي دالة ل x ونطبق قواعد الاشتقاق السابقة .

Example : Find y' of the equation $x^3 + 4y^3 - xy^2 + 7x = 10$.

Solution : $3x^2 + 12y^2y' - [x(2yy') + y^2] + 7 = 0$

$$3x^2 + 12y^2y' - 2xyy' - y^2 + 7 = 0$$

$$(12y^2 - 2xy)y' + (3x^2 - y^2 + 7) = 0$$

$$y' = \frac{(3x^2 - y^2 + 7)}{(12y^2 - 2xy)}$$

- **اشتقاق المراتب العليا :**

اذا كانت f(x) دالة قابلة للاشتقاق فأن $f'(x)$ مشتقتها الاولى هي دالة جديدة للمتغير X . فأذا كانت $f'(x)$ قابلة للاشتقاق ايضاً فأنه يطلق على مشتقتها المشتقة الثانية للدالة الاصلية f(x) ويرمز لها بالرمز $f''(x)$ ، y'' ، $\frac{d^2y}{dx^2}$ وبذلك فأن

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

وبالمثل تعرف المشتقة الثالثة (ان وجدت) بأنها مشتقة المشتقة الثانية وهكذا بالنسبة للمشتقات الرابعة والخامسة .

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

المشتقة الثانية

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$$

المشتقة الثالثة

$$\vdots$$

$$y^n = \frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

المشتقة من الرتبة n

- **Derivatives of Trigonometric Function**

1) $y = sinx \quad \rightarrow \dfrac{dy}{dx} = cosx \;.(x')$

2) $y = cosx \quad \rightarrow \dfrac{dy}{dx} = -sinx \;.(x')$

3) $y = tanx \quad \rightarrow \dfrac{dy}{dx} = sec^2x \;.(x')$

4) $y = cotx \quad \rightarrow \dfrac{dy}{dx} = -csc^2x \;.(x')$

5) $y = secx \quad \rightarrow \dfrac{dy}{dx} = secx\, tanx \,.(x')$

6) $y = cscx \quad \rightarrow \dfrac{dy}{dx} = -cscx\, cotx \,.(x')$

Example 1: Find $\frac{dy}{dx}$ of $y = x^2 - sinx \;\rightarrow\; \frac{dy}{dx} = 2x - cosx$

Example 2: Find $\frac{dy}{dx}$ of $y = x^2sinx \;\rightarrow\; \frac{dy}{dx} = x^2\, cosx + sinx\, .2x$

Example 3: Find $\frac{dy}{dx}$ of $y = \frac{sinx}{x} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x\, .cosx - sinx\, .1}{x^2}$

Example 4: Find $\frac{dy}{dx}$ of $y = 5x + cosx \rightarrow \frac{dy}{dx} = 5 - sinx$

Example 5: Find $\frac{dy}{dx}$ of $y = sinx\; cosx \;\rightarrow$

$$\frac{dy}{dx} = \sin x\,(-\sin x) + \cos x \cos x$$

$$= -sin^2x + cos^2x$$

Example 6: Find $\frac{dy}{dx}$ of $y = tanx^2 \rightarrow \frac{dy}{dx} = sec^2x^2.(2x)$

Example 7: Find $\frac{dy}{dx}$ of $y = \frac{x}{1+\cot 2x} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{(1+cot2x).1 - x\,(-csc^2 2x).2}{(1+\cot 2x)^2}$

Example 8: Find $\frac{dy}{dx}$ of $y = secx^3 + csc2x^2$

$$\frac{dy}{dx} = secx^3\; tanx^3\;\; .3x^2 - csc2x^2\; .cot2x^2\; .(4x)$$

- **The Exponential function   exp(x) = e^x**

e= 2.7182818459045

$$y = e^x \rightarrow \frac{dy}{dx} = e^x.(x')$$

For all real number x , x_1 and x_2

1) $e^{x_1}e^{x_2} = e^{x_1+x_2}$
2) $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
3) $\frac{e^{x_1}}{e^{x_2}} = e^{x_1-x_2}$
4) $e^{\ln x} = x$

Example1: $y = e^{x^2}$

Solution: $\frac{dy}{dx} = e^{x^2}.2x$

Example2: $y = e^{\ln \sin x}$

Solution : $\frac{dy}{dx} = e^{\ln \sin x}.\frac{1}{\sin x}.\cos x = \frac{\sin x}{\sin x}.\cos x = \cos x$

Or $y = e^{\ln \sin x} \rightarrow y = \sin x \rightarrow \frac{dy}{dx} = \cos x$

Example3: $y = e^{\tan 3x^2}$

Solution : $\frac{dy}{dx} = e^{\tan 3x^2}.\sec^2 3x^2.6x$

التكامـــل

I- تكامل دالة متصلة على مجال

1- تعريف و ترميز

لتكن f دالة متصلة على مجال I و a وb عنصرين من I .

إذا كانت F و G دالتين أصليتين للدالة f على I فان F(b)-F(a)=G(b)-G(a).

أي أن العدد الحقيقي F(b)-F(a) غير مرتبط باختيار الدالة الأصلية F.

تعريف

لتكن f دالة متصلة على مجال I و a وb عنصرين من I.
العدد الحقيقي F(b)-F(a) حيث F دالة أصلية للدالة f علىI , يسمى تكامل الدالة f من a إلى b
ويكتب $\int_a^b f(x)dx$ ويقرأ مجموع $f(x)dx$ من a إلى b أو تكامل من a إلى b لـ $f(x)dx$.

a وb يسميا محدا التكامل $\int_a^b f(x)dx$

في الكتابة $\int_a^b f(x)dx$ يمكن تعويض x بأي حرف آخر ، بمعنى أن

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(u)du=........$$

من أجل تبسيط الكتابة F(b)-F(a) نكتبها على الشكل $\int_a^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b$

أمثلة

* نحسب $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$

الدالة $x\to\frac{1}{x}$ متصلة على $[1;2]$ و دالة أصلية لها هي $x\to\ln x$

اذن $\int_1^2 \frac{1}{x}dx=\left[\ln x\right]_1^2=\ln 2$

* أحسب $\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos x dx$; $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2+1}dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2 x}dx$

2- خاصيات

أ- خاصيات

لتكن f دالة متصلة على مجال I و a وb وc عناصر منI

*$\int_a^a f(x)dx=0$ * $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

* $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$ (علاقة شال)

أمثلة

أحسب $I=\int_{-1}^{1}|x|dx$

$$\int_{-1}^{1}|x|dx=\int_{-1}^{1}|x|dx=\int_{-1}^{0}-xdx+\int_0^1 xdx=\left[\frac{-1}{2}x^2\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=1$$

ب)- لتكن f دالة متصلة على مجال I و a عنصرا من I

$$\varphi : I \to \mathbb{R}$$

$$x \to \int_a^x f(t)dt$$

لدينا $\varphi(x) = F(x) - F(a)$ $\forall x \in I$ حيث F دالة أصلية لـ f على I.

اذن φ قابلة للاشتقاق على I و $\varphi' = f$ $\varphi(a) = 0$ أي أن φ دالة الأصلية للدالة f على I التي تنعدم في a

<u>خاصية</u>

لتكن f دالة متصلة على مجال I و a عنصرا من I.

الدالة المعرفة على I بما يلي $x \to \int_a^x f(t)dt$ هي الدالة الأصلية لـ f على I التي تنعدم في a

<u>مثال</u> نعلم أن الدالة $x \to \ln x$ هي الدالة الأصلية لـ $x \to \frac{1}{x}$ على $]0;+\infty[$ التي تنعدم في1 .

$$\forall x \in]0;+\infty[\quad \ln x = \int_1^x \frac{1}{t}dt$$

<u>تمرين</u> حدد الدالة الأصلية لـ f على $]0;+\infty[$ التي تنعدم في 2 حيث $f(x) = \frac{1}{x}\ln x$ $\forall x \in]0;+\infty[$

<u>ج)- خاصية</u>

لتكن f و g دالتين متصلتين على $[a;b]$ و λ عدد حقيقي ثابت

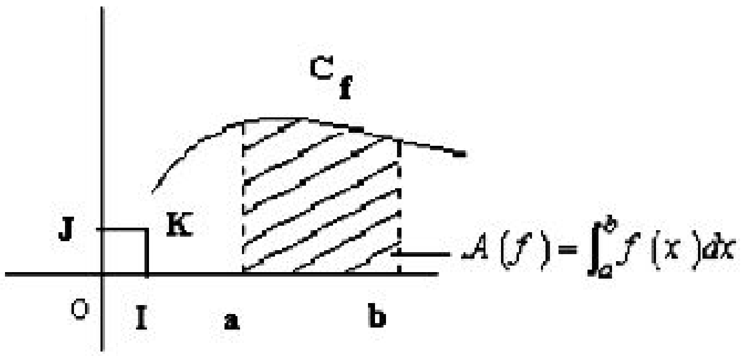
$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \qquad \int_a^b (\lambda f(x))dx = \lambda\int_a^b f(x)dx$$

<u>تمرين</u> حدد $\int_0^1 (x^2 - 3x + 1)dx$; $\int_0^\pi \cos^4 x dx$ (يمكن اخطاط $\cos^4 x$)

<u>تمرين</u> نعتبر $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}dx$ $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}dx$

أحسب $I + J$ $I - J$ و استنتج I ; J

<u>د التأويل الهندسي للعدد</u> $\int_a^b f(x)dx$



<u>خاصية</u>

إذا كانت f دالة متصلة و موجبة على $[a;b]$ ($a \prec b$) فان مساحة الحيز المحصور بين منحنى الدالة f و محور الأفاصيل و المستقيمين المعرفتين على التوالي بالمعادلتين $x = a$ و $x = b$ هي $A(f) = \int_a^b f(x)dx$ بوحدة قياس المساحات

<u>ملاحظة</u> إذا كان المستوى منسوب إلى معلم متعامدين فان وحدة قياس المساحة هي مساحة المربع OIJK

تمرين

نعتبر $f(x)=\frac{1}{x^2}$

أنشئ C_f $\left(\|\vec{i}\|=1cm \quad \|\vec{j}\|=2cm\right)$

أحسب بـ cm^2 مساحة الحيز المحصور بين C_f و محور الأفاصيل و المستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x=1$; $x=3$.

II- تقنيات حساب التكاملات

1- الاستعمال المباشر لدوال الأصلية

أمثلة

* أحسب $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}dx$ نلاحظ أن $\frac{(\ln x)^2}{x}$ على شكل $u'u^2$ حيث $u(x)=\ln x$

و نعلم أن الدالة الأصلية لـ $u'u^2$ هي $\frac{1}{3}u^3$ إذن $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}dx=\left[\frac{1}{3}u^3(x)\right]_1^e=\left[\frac{1}{3}\ln^3 x\right]_1^e=\frac{1}{3}$

* أحسب $\int_0^1 \frac{2}{e^x+1}dx$ لدينا $\frac{2}{e^x+1}=2\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ بهذا التحويل نلاحظ أن $\frac{2}{1+e^x}$ يكتب على شكل $-2\frac{u'}{u}$ حيث $u(x)=1+e^{-x}$ إذن $\int_0^1 \frac{2}{e^x+1}dx=\left[-2\ln|u(x)|\right]_0^1=\left[-\ln\left(1+e^{-x}\right)\right]_0^1$

تمرين 1- حدد $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^3 x dx$

2- أ- أوجد a و b و c حيث $\frac{2x^4+x^2+x-1}{x^3+x}=ax+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2+1} \quad \forall x\neq 0$

ب- استنتج قيمة $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{2x^4+x^2+x-1}{x^3+x}dx$

3- بين أن التعبير $\frac{1}{x^2-2x+5}$ يكتب على شكل $\frac{1}{2}\frac{u'}{u^2+1}$ حيث u دالة يجيب تحديدها .

استنتج قيمة $\int_1^{1+2\sqrt{3}}\frac{1}{x^2-2x+5}dx$

4- أحسب $\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+2)}dx \quad ; \quad \int_e^{e^2}\frac{1}{x\ln x}dx \qquad \left(\frac{1}{x\ln x}=\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\right)$

2- المكاملة بالأجزاء

لتكن f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على $[a;b]$ بحيث f' و g' متصلتين على $[a;b]$

نعلم أن

$$\forall x\in[a;b] \quad (fg)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

$$\forall x\in[a;b] \quad f'(x)g(x)=(fg)'(x)-f(x)g'(x)$$

خاصية

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx=\left[(fg)(x)\right]_a^b-\int_a^b f(x)g'(x)dx$$

مثال أحسب $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x dx$ نضع $u'(x)=\cos x \quad ; \quad v(x)=x$

ومنه $u(x)=\sin x \quad ; \quad v'(x)=1$

إذن $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx=[x\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=[x\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}-[-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1$

تمرين أحسب $I=\int_1^e \ln x dx \quad ; \quad J=\int_0^{\pi} x^2\sin x dx \quad ; \quad K=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$

الحل

$$K=\left[e^x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x dx=\left[e^x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left[e^x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-K$$

$$K=\frac{1}{2}\left(\left[e^x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left[e^x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=\dots\dots\dots$$

تمرين -1 أحسب $\int_1^2 x^2\ln x dx \quad \int_0^3 (x-1)e^{2x}dx \quad \int_0^1 x\sqrt{x+3}dx \quad \int_0^1 \ln\left|\frac{x+2}{x+1}\right|dx$

-2 باستعمال المكاملة بالأجزاء أوجد الدوال الأصلية لـ f على $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ حيث $f(x)=\frac{x}{\cos^2 x}$

-3 أحسب $I=\int_0^x e^t\cos^2 t dt$ (يمكن اعتبار $J=\int_0^x e^t\sin^2 t dt$)

-3 المكاملة بتغيير المتغير

لتكن g دالة قابلة للاشتقاق على $[a;b]$ حيث g' متصلة على $[a;b]$. و f دالة متصلة على J حيث $g([a;b])=J$

إذا كانت F دالة أصلية لـ f على J فان $(F\circ g)'(x)=f(g(x))\times g'(x) \quad \forall x\in[a;b]$

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx=\left[F\circ g(x)\right]_a^b=F(g(b))-F(g(a))=\int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt$$

خاصية

لتكن g دالة قابلة للاشتقاق على $[a;b]$ حيث g' متصلة على $[a;b]$. و f دالة متصلة على J حيث $g([a;b])=J$.

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx=\int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt$$

ملاحظة

إذا وضعنا $t=g(x)$ فان $\frac{dt}{dx}=g'(x)$ أي $dt=g'(x)dx$

إذا عوضنا في التعبير $f(g(x))g'(x)dx$ المتغير x بالمتغير t نحصل على $f(t)dt$

ولدينا إذا كان $\left.\begin{matrix}x=a\\x=b\end{matrix}\right\}$ فان $\left.\begin{matrix}t=g(a)\\t=g(b)\end{matrix}\right\}$

نقول إننا أجرينا تغييرا للمتغير بوضع $t=g(x)$

أمثلة أحسب $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{4}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx \quad \left(t=\frac{1}{x}\right) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x} \quad \left(t=\tan\frac{x}{2}\right)$

ملاحظة $\left(\sin x=\frac{2t}{1+t^2} \quad ; \quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)$